



المراجعة النهائية للصف الثاني عشر العلمي



السؤال الأول : على نظرية القيمة المتوسطة

$$(1) \text{ إذا كانت } f(x) = \frac{2}{x}$$

(a) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على $[1, e]$

(b) قيمة c التي يكون عندها $f(c) = av(x)$

(c) إرسم الدالة $f(x)$ والمستطيل طوله على الفترة $[1, e]$ والذي ارتفاعه بإرتفاع القيمة المتوسطة

وللدالة ثم اكتب أبعاد هذا المستطيل وبين العلاقة بين مساحة المستطيل و $\int_1^e f(x) dx$

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



(2) عند مراقبة درجات الحرارة بعد منتصف الليل في إحدى المدن تبين أنه يمكن نمذجتها بالقانون :

$$T(x) = 2 - \frac{1}{7}(x - 13)^2$$

حيث x هو الوقت بعد منتصف الليل و $T(x)$ درجات الحرارة .

(a) ما متوسط درجات الحرارة بين 4:00 صباحا و 4:00 بعد الظهر ؟

(b) في أي وقت تحدث هذه الحرارة ؟

(3) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $y = (x - 1)^2$

على الفترة $[0, 3]$ و عند أي نقاط في الفترة نأخذ الدالة هذه القيمة .

(4) إذا علمت أن القيمة المتوسطة للدالة f على الفترة $[1, 4]$ تساوي 8 والقيمة المتوسطة

للدالة f على الفترة $[4, 6]$ تساوي k والقيمة المتوسطة للدالة f على الفترة

$[1, 6]$ تساوي 18 أوجد قيمة k .



(5) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x \sin x$ علي الفترة $[0, \pi]$

(ارشاد : استخدم التكامل بالتجزئ)

Handwriting practice lines for the solution of question 5.

(6) عند إجراء عملية جراحية لمريض حقن (البنج) وبعد مضي t ساعة كان تركيز المخدر في دم المريض $C(t)$

$$C(t) = \frac{3t}{(t^2+36)^2} \text{ mg/cm}^2 \text{ حيث}$$

(■) أوجد متوسط تركيز المخدر $(av C(t))$ اثناء الساعات الثمانية الاولى بعد حقن المريض مباشرة.

Handwriting practice lines for the solution of question 6.

(7) بفرض أن f دالة متصلة $[-5, 4]$

القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ في $[-5, 1]$ تساوي 4 القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ في $[1, 4]$ تساوي 6

أحسب كلا من :

$$(a) \int_{-5}^1 f(x) dx$$

$$(b) \int_{-5}^4 f(x) dx$$

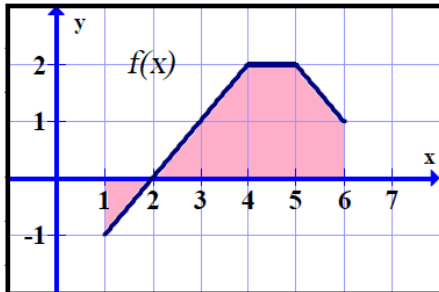


$$(8) \text{ إذا كان : } \int_0^2 f(x) dx = 15, \int_2^6 f(x) dx = 12, \int_9^6 f(x) dx$$

(a) احسب متوسط التكامل للدالة $f(x)$ أي $av(f)$ على الفترة $[0, 9]$

$$(b) \text{ ما هو البعد الآخر لمستطيل احد بعديه } av(f) \text{ ومساحته مساوية لقيمة } \int_0^9 f(x) dx$$

مع تفسير إجابتك.



(9) اوجد قيمة المتوسط للدالة $f(x)$ على $[1, 6]$

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



(10) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$ على الفترة $[0, 3]$

..... (استخدم التكامل بالتعويض)

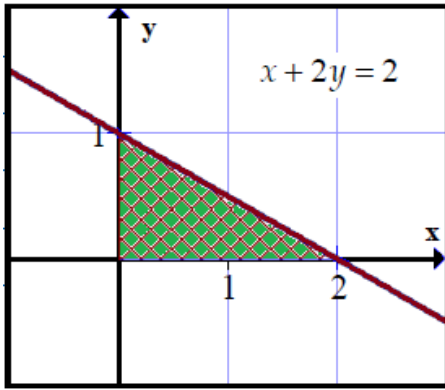
(11) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(t) = 2 - \sqrt{9 - t^2}$ على الفترة $[-3, 3]$

ثم أوجد قيم c التي تقع في هذه عندها $f(c)$ تساوي هذه القيمة المتوسطة.

(12) إذا علمت أن الدالة $f(x) = 2 \sin x \cot x$ متصلة على الفترة $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

أوجد القيمة المتوسطة للدالة f في الفترة $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



(13) اوجد القيمة المتوسطة للدالة في الفترة $[0, 2]$

من إجراء عملية التكامل باللجوء لهندسة المنطقة بين

المنحني ومحور السينات

السؤال الثاني: على حل المعادلات التفاضلية :

(1) إذا علمت إن P عدد سكان مدينة بدائية عام 2005 م هو 100000 نسمة, وأن معدل تزايد عدد السكان

يعطي بالعلاقة $P'(t) = (4 + 0.15)^3$ قدر عدد سكان المدينة في بداية عام 2010 م .

(2) حل المعادلات التفاضلية التالية:

(a) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

(b) $\frac{dy}{dx} = (2x - 1)(y + 1)$



حيث $-1 \leq x \leq 1$ وإذا $x = 0$ تكون $y = 1$ (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \sqrt{1 - x^2}$

(3) تعطي السرعة المتجهة لجسيم يتحرك بالمعادلة $V(t) = 8e^{-0.02t}$ حيث

(t) بالثواني $V(t)$ بالامتار. أوجد المسافة التي يقطعها هذا الجسيم بعد نصف دقيقة علما بأن $S(0) = 0$

(4) في ماتجربة كان معدل التغير في حجمة كمية من الغاز V (مقدر بالمتري المكعب) بالنسبة

للضغط الواقع عليها P (بالنيوتن/ متر مربع) يعطي بالعلاقة $\frac{dV}{dP} = \frac{-a}{p^2}$ حيث a ثابت

وكان $V = 12m^3$ عندما $p = \frac{1}{2} N/m^2$ أوجد الدالة $V(p)$

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



(5) آلة تصوير قيمتها عند الشراء درهم $R = 2500$, تتناقص قيمتها تتناقص قيمتها بالنسبة

للزمن t بمعدل $\frac{dR}{dx} = \frac{-500}{(t+1)^2}$ أوجد قيمة هذه الآلة بعد ثلاثة سنوات.

(6) بين أن $y = e^x \sin x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(7) قام أحمد بزراعة نخلة ولاحظ أنها تنمو بمعدل :متر/سنويا $\frac{dL}{dx} = 1 + (t+1)^{-2}$

حيث L ارتفاع النخلة بالمتر, t الزمن بالسنوات, وبعد سنتين من زراعتها بلغ ارتفاعها 5 أمتار
أوجد ارتفاع النخلة عند بدء زراعتها

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{-t}{50} + 10, \quad 0 \leq t \leq 100$$

(8) لتكن

حل المعادلة التفاضلية إذا علمت أن $G(10) = 200$

$$\frac{dV}{dT} = \frac{1087}{2\sqrt{273}} T^{-\frac{1}{2}}, \quad V(273) = 1087$$

(9) لتكن :

أوجد V بدلالة T ؟

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{t+2}, \quad v(0) = 5$$

(10) لتكن

أوجد $v|_{t=2}$ ؟

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله .



$$\frac{dy}{dt} = 200e^{2t}, \quad y(0) = 100 \quad (11) \text{ لتكن}$$

أوجد y ؟ (a)

أوجد $y|_{t=4}$ ؟ (b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{y}(x+6)}{x^2-4}$$

(12) حل المعادلة التفاضلية :

(استخدم الكسور الجزئية).....

$$(13) \text{ أوجد الدالة } y = f(x) \text{ حيث } \frac{d^2y}{dx^2} = 6x \text{ والماس المرسوم الدالة لمنحني } f(x) \text{ عند } (0, 1) \text{ أفقيا}$$

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله ، فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



السؤال الثالث: على النظرية الأساسية (الجزء الأول) :

(1) أوجد $\frac{dy}{dx}$ فى كلا مما يأتي :

(a) $y = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t \, dt$: $x > 0$

(b) $\frac{d}{dx} \int_1^{\cos x} (1 - t^2) \, dt$

(c) $\frac{d}{dt} \int_{\ln(2x)}^{\ln(x^2)} (1 + e^t) \, dt$

(d) $\int_{x^2}^{x^3} \sin(3t) \, dt$

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



(2) إذا كان $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2} dt$ فأثبت أن $f'(x) = -1$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(3) لتكن $f(x), g(x)$ دوال متصلة للإشتقاق على كل الأعداد الحقيقية وكان :

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	-1	6	7

حيث $L(x) = \int_1^{g(x)} f(x) dt$

(i) $L'(x)$ أوجد

(ii) $L'(3)$ أوجد

أوجد $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^2 \cos t^2 dt$

(4)



(5) لتكن $y = x^3 - \int_x^1 \left(\frac{1}{t}\right) dt + \sqrt{2}$ أثبت أن : $xy' = 3x^3 + 1$

السؤال الرابع : على التكمالات المحدودة وريمان :

(1) إذا كانت p تجزئ $[0, 2]$ أوجد قيمة $\lim_{||p|| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (3c_k^2 + 5) \Delta x_k$

(2) لتكن الدالة : $f(x) = -x^2 + 4$ ومنحنها (C) على الفترة $[0, 2]$

استخدام طريقة التقريب المنتصفي بالمستطيلات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني (C) والمحور السيني والمستقيمين $x = 0, x = 2$ بتقسيم الفترة $[0, 2]$ إلى 4 فترات جزئية متساوية.

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



(3) لتكن f دالة متصلة على الفترة $[1, 8]$ لأي تجزئ p على الفترة $[1, 8]$

عبر عن النهاية $\lim_{||p|| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left(2c_k + \frac{5}{c_k}\right) \Delta x_k$ بصورة تكامل محدود.

ثم أوجد قيمته.

(4) لتكن f دالة متصلة على الفترة $[1, 5]$ لأي تجزئ p على الفترة $[1, 5]$ وكان :

$$\lim_{||p|| \rightarrow 0} (f(c_k) + 2) \Delta x_k = 20$$

$$\int_1^5 f(x) dx$$

أوجد قيمة

(5) إذا كانت $f(x) = \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}$ حيث $1 \leq x \leq 3$ ولأي تجزئ p على الفترة $[1, 3]$

أوجد $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (f(c_k) - 5) \Delta x_k$ حيث c_k أي في الفترة الجزئية.



(6) لتكن f دالة متصلة علي الفترة $[1, 5]$ لأي تجزئ p علي الفترة $[1, 5]$ وكان :

$$\lim_{||p|| \rightarrow 0} (f(c_k) + 8)\Delta x_k = 36$$

$$\int_1^5 f(x) dx$$

أوجد قيمة

(7) لتكن f دالة متصلة علي الفترة $[1, 5]$ لأي تجزئ p علي الفترة $[1, 5]$ وكان :

$$\lim_{||p|| \rightarrow 0} (f(c_k) + 2c_k)\Delta x_k ? \quad \text{أوجد}$$

$$\int_2^5 f(x) dx = 6, \quad \int_3^2 f(x) dx = -4, \quad \int_1^3 f(x) dx = 4$$

حيث

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



(8) لتكن $f(x) = 2 \sin x \cot x$ دالة متصلة علي الفترة $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

لأي تجزئ p علي الفترة $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$: أوجد $\lim_{||p|| \rightarrow 0} (f(c_k)) \Delta x_k$ ؟

السؤال الخامس : على خواص التكامل المحدود :-

$$(1) \int_0^1 (x + 2\sqrt{1-x^2}) dx$$

باستخدام خواص التكامل والمساحات أوجد

$$(2) \quad 0 \leq \int_{-1}^1 e^x \sqrt{x+1} dx \leq \frac{\sqrt{2}(e^2 - 1)}{e} \quad \text{بين أن :}$$

$$(3) \quad \int_1^3 (2f(x) - 4) dx \quad \text{إذا كانت } f(x) \geq 6 \text{ على } [1, 3] \text{ أوجد أصغر قيمة للتكامل}$$



بين أن $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx \geq \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$ علما بأن $x \geq x^2$ لكل x تنتمي لـ $[0, 1]$ (4)

باستخدام خواص التكامل المحدد أثبت أن : $\pi \leq \int_0^{\pi} (2 + (\sin x)^3) dx \leq 3\pi$ (5)

باستخدام خواص التكامل المحدد أثبت أن : $12 \leq \int_2^6 (2x - 1) dx \leq 44$ (6)

باستخدام خواص التكامل المحدد أثبت أن : $\pi \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2 + \sin x)} dx \leq \sqrt{3} \pi$ (7)



بأستخدام خواص التكامل المحدد أثبت أن : $1 \leq \int_0^1 3x^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 44$ (8)

السؤال السادس : على المشتقة العكسية :

(1) إذا كانت كلا من الدالتين $F(x), G(x)$ عكسية للدالة $F(x)$ حيث :

$$F(x) = x^2 e^{-x}, \quad G(x) = \frac{x^2 - 2e^x}{e^x}$$

(i) فأوجد قيمة الثابت C التي تختلف به الدالتين $G(x), F(x)$

(ii) اثبت أن $f(x) = xe^{-x}(2-x)$

(2) بين أن $G(x) = t \sin 5t$ هي مشتقة عكسية للدالة : $g(t) = 5t \cos 5t + \sin 5t$



مستفيداً مما توصلت إليه أ وجد

$\int t \cos 5t dt$

(3) إذا كانت $F(x) = \frac{1}{2}(\sec x)^2 + \ln x$ مشتقة عكسية للدالة $f(x)$

وكذلك $G(x) = \frac{1}{2}(\tan x)^2 + \ln x + \ln e$ مشتقة عكسية أخرى للدالة $f(x)$

■ أوجد قيمة الثابت C التي تختلف به $F(x)$ عن $G(x)$

(4) لتكن الدالتان : $G(x) = \frac{1}{4}(2x^2 + 4)^2$, $F(x) = x^2(x^2 + 4)$

اثبت أن $F(x)$, $G(x)$ دالتان كل منهما المشتقة العكسية للدالة $f(x)$

$\int f(x) dx$

ثم أوجد



(5) إذا كانت : $f(x) = \ln ex + \pi e^{\pi x}$

أثبت أن : $F(x) = x \ln x + e^{\pi x}$ هي عكسية للدالة $f(x)$ حيث : $x > 0$

$$\int f(x) dx$$

ثم أوجد

(6) اثبت أن : $F(x) = e^{2x} \ln 3x$

هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = e^{2x} \left(\frac{1}{x} + \ln 9x^2 \right)$ حيث $x > 0$

(7) اثبت أن : $F(x) = e^{(\cos x + \ln x)}$

هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = e^{\cos x} (1 - x \sin x)$ حيث $x > 0$



(8) اثبت أن : $G(x) = x^2 \ln x - e^{-x}$

هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = x \ln ex^2 + e^{-x}$ على $[1, 4]$

ثم أوجد : $\int_1^4 f(x) dx$

السؤال السابع : على التكامل بالتعويض والتجزئ والكسور الجزئية:

إستخدم التجزئ أو التكامل الجدولي $(1) \int (x^3 - x)e^x dx$

أستخدم الكسور الجزئية $(2) \int \frac{3x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} dx$



$$(3) \int 2x^3 \sin(x^2 + 1) dx$$

إستخدم التعويض ثم التجزئ

(4) لتكن $F(x)$ عكسية للدالة المتصلة $f(x)$ وكانت $F(2) = 2F(5) = 14$ وكانت

$$\int_2^5 xf'(x) dx \quad : \quad f(2) = f(5) = 3 \quad \text{أوجد قيمة}$$

إستخدم التجزئ أو التكامل الجدولي

$$(5) \int \frac{1}{x(x^2 - 1)} dx$$

أستخدم الكسور الجزئية

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



$$(6) f(x) = \frac{2x+6}{(x+1)(x-3)} :$$

أوجد الكسور الجزئية المكافئة للدالة

$$\int f(x) dx$$

إستنتج

$$(7) (a) \int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

إستخدم التعويض

$$(b) \int (x + 1) \sin(x^2 + 2x + 3) dx$$

$$(8) (a) \int x^2 \sin 4x dx$$

إستخدم التجزئ



$$(b) \int x \sin x \cos x dx$$

Handwriting practice lines for the integral problem (b).

$$(9) \quad 0 < x < \infty : f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

لتكن الدالة

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad \text{بين أن :} \quad (a)$$

Handwriting practice lines for the partial fraction decomposition problem (a).

$$\int f(x) dx$$

(b) استخدام التكامل بالتجزئ لإيجاد

Handwriting practice lines for the integration problem (b).

$$(10) \int \frac{x+4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$$

أستخدم الكسور الجزئية

Handwriting practice lines for the partial fraction decomposition problem (10).



(11) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x \sqrt{2 - \sin 4x} dx$: استخدام التكامل بالتعويض لإيجاد

(12) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{x^2 - 1}$ إذا كانت

$\int_2^6 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$ استخدم الكسور الجزئية في إيجاد

(13) $f(4) = -8, f(1) = 3, \int_1^4 f(x) dx = 12$: إذا كانت

$\int_1^4 (2x + 3)f'(x) dx$: استخدام التكامل بالتجزئ لإيجاد



$$(14) \int \frac{(5 + \cos x)^2}{\csc x} dx$$

استخدام التكامل بالتعويض لإيجاد



$$(16) \int_2^4 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$$

استخدم الكسور الجزئية في إيجاد



(17) لتكن دالة $f''(x)$ مشتقاتها الثانية متصلة على الفترة $[1, 5]$ وكانت :

$$f'(1) = f(1) = 2, \int_1^5 f(x) dx = 10, f'(5) = f(5) - 6$$



$$\int_1^5 x^2 f''(x) dx$$

استخدام التكامل بالتجزئ لإيجاد



اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



$$(18) \int_3^6 f(x) dx = 18$$

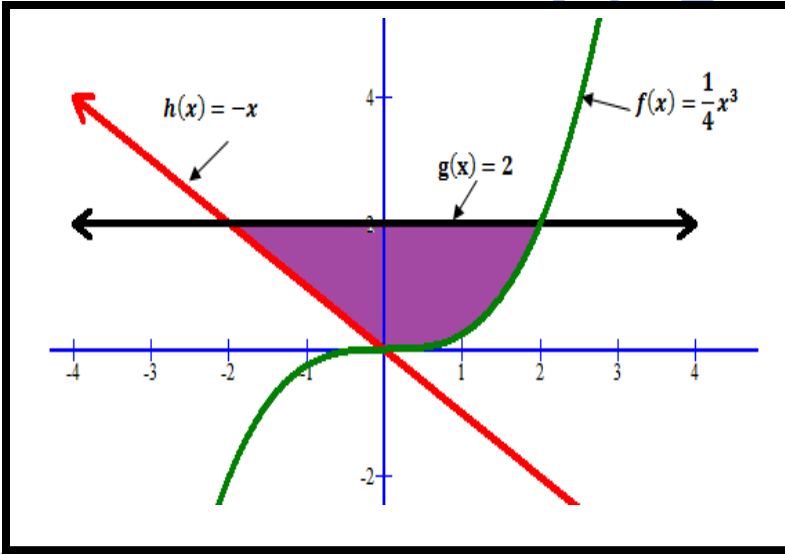
إذا علمت أن :

$$\int_0^1 (x+1)f(x^2+2x+3) dx$$

استخدام التكامل بالتعويض لإيجاد

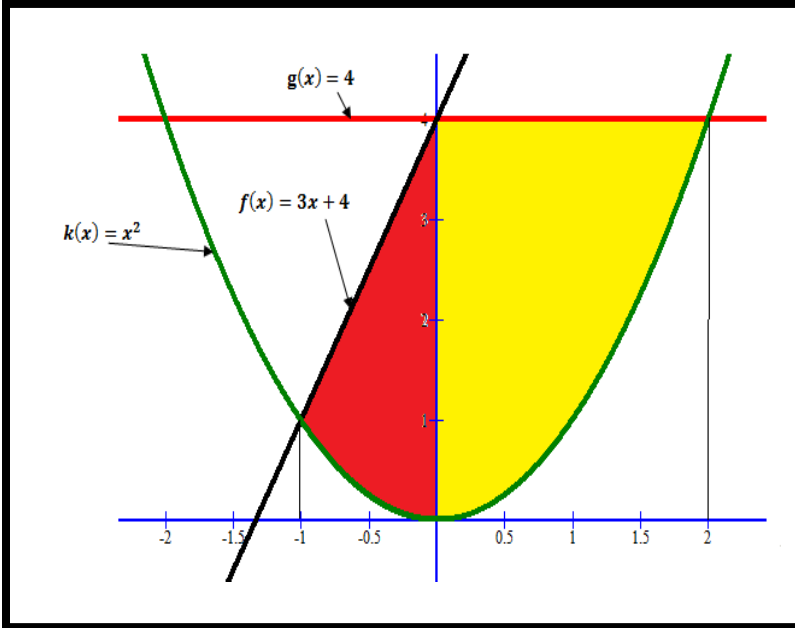
السؤال الثامن : على المساحات :

(1) أوجد مساحة المنطقة المظللة



اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.

أرنقاء



(2) أوجد مساحة المنطقة المظللة

السؤال التاسع : على أطوال المنحنيات (طول القوس) :

(1) أوجد : طول القوس منحنى الدالة $y = x\sqrt{x}$ من $x = 0$ إلى $x = 4$

اللهم لك الحمد كله وإليك يرجع الأمر كله , فاغفر لنا ذنوبنا كله وأصلح لنا شأننا كله.



(2) أوجد : طول قوس المنحني $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ طول الفترة $[1, 4]$

(3) إذا كان $(x) = \int_3^x \sqrt{4t^3 - 1} dt$

(i) أحسب قيمة كل من $F(3)$, $F'(3)$

(ii) أوجد طول منحنى الدالة $F(x)$ من $x = 3$ إلى $x = 5$

(4) لتكن $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$

أثبت أن : الدالة $f(x)$ دالة ثابتة

ثم أوجد طول المنحني $f(x)$ حيث $2 \leq x \leq 5$



السؤال العاشر : على التكمالات :

أوجد التكمالات التالية :

$$1) \int e^{\tan x} dx + \int \tan^2 x e^{\cot x} dx$$

$$2) \int \left(\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} x + \tan^2 x \right) dx$$

$$3) \int \left(3x^2 + \frac{x-3}{x^2-9} - e^{5x} + \sqrt{3} \right) dx$$

$$4) \int \frac{\sin 2x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$5) \int \left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$$



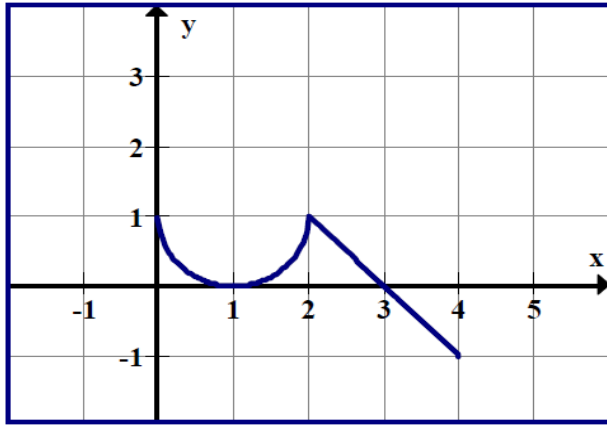
السؤال الحادي عشر : على الرسم البياني :

■ $f(x)$ دالة متصلة والرسم البياني موضح بالشكل المجاور , ودالة الموضع عند الزمن t (الثانية)

لجسم يتحرك علي محور إحداثيات هي :

$$S(x) = \int_0^t f(x) dx$$

أستخدم الرسم البياني للإجابة علي الاسئلة التالية وأعط أسبابا لإجابتك أوجد كل من



(i) سرعة الجسم عند $t = 2$

(ii) موقع الجسم عند $t = 2$

(iii) متي تنعدم السرعة .

(iv) أوجد $\int_2^4 f(x) dx$

(v) باستخدام التكامل المحدد أثبت أن : $-4 \leq \int_0^4 f(x) dx \leq 4$