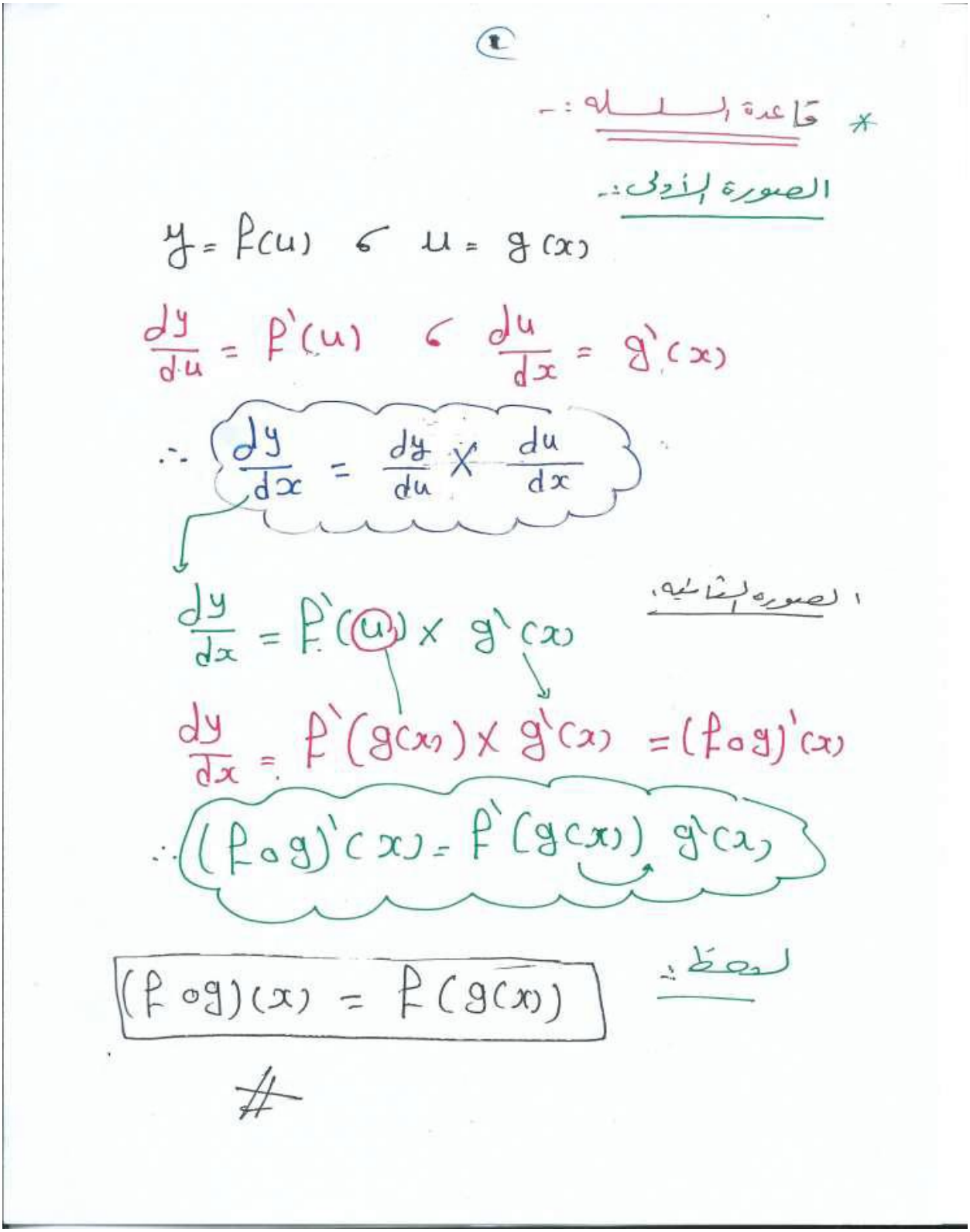
الرياضيات

أمثلة محلولة على الإشتقاق

الصف الثاني عشر العلمي

الفصل الدراسي الأول

إعداد أ.هلال حسين


①
* قاعدة السلسلة :-
الصورة الأولى :-
$y = f(u)$ ، $u = g(x)$
$\frac{dy}{du} = f'(u)$ ، $\frac{du}{dx} = g'(x)$
$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$
الصورة الثانية :-
$\frac{dy}{dx} = f'(u) \times g'(x)$
$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \times g'(x) = (f \circ g)'(x)$
$\therefore (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$
لاحظ :-
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
#

(2)

مثال (تمرين)

$$y = f(u) = 3u^3 + 5u + 1$$

$$u = g(x) = 2\sqrt{x}$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

الحل

$$\frac{dy}{du} = 9u^2 + 5 \Big|_{u=2} = 36 + 5 = \boxed{41}$$

$x = 1 \Rightarrow u = 2\sqrt{1} = 2 \times 1 = 2$

$$\frac{du}{dx} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 41 \times 1 = 41$$

مثال لنفس المثال السابق

أوجد $(f \circ g)'$ عند $x = 1$

$$(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1)$$

$x = 1 \Rightarrow u = 2$

$$f'(u) = 9u^2 + 5 \Big|_{u=2} = 41$$

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=1} = 1$$

$$(f \circ g)'(1) = 41 \times 1 = 41$$ #

3

مثال لتكن $y = u^3 - 5u$ ، $u = \frac{1}{f(x)} - 3$

وكان $f'(1) = 2$ ، $f(1) = 1$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

الحل

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 5 \Big|_{u=-2} = 12 - 5 = 7$$

$x = 1$

$u = \frac{1}{f(1)} - 3$

$\boxed{u = -2}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-1 \times f'(x)}{(f(x))^2} \Big|_{x=1} = \frac{-f'(1)}{(f(1))^2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = 7 \times -2 = -14$$

#

مثال: لتكن $y = f(3x)$ ، $\frac{dy}{dx} = 9x^2$ أوجد

(i) $f''(3x)$ (ii) $f''(6)$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = f'(3x) \cdot 3$$

(i) $\cancel{9}^{3}x^2 = \cancel{3} f'(3x) \Rightarrow 3x^2 = f'(3x)$

$f'(3x) = 3x^2 \Rightarrow f''(3x) \cdot \cancel{3} = \cancel{6}^{2}x$

$f''(3x) = 2x$

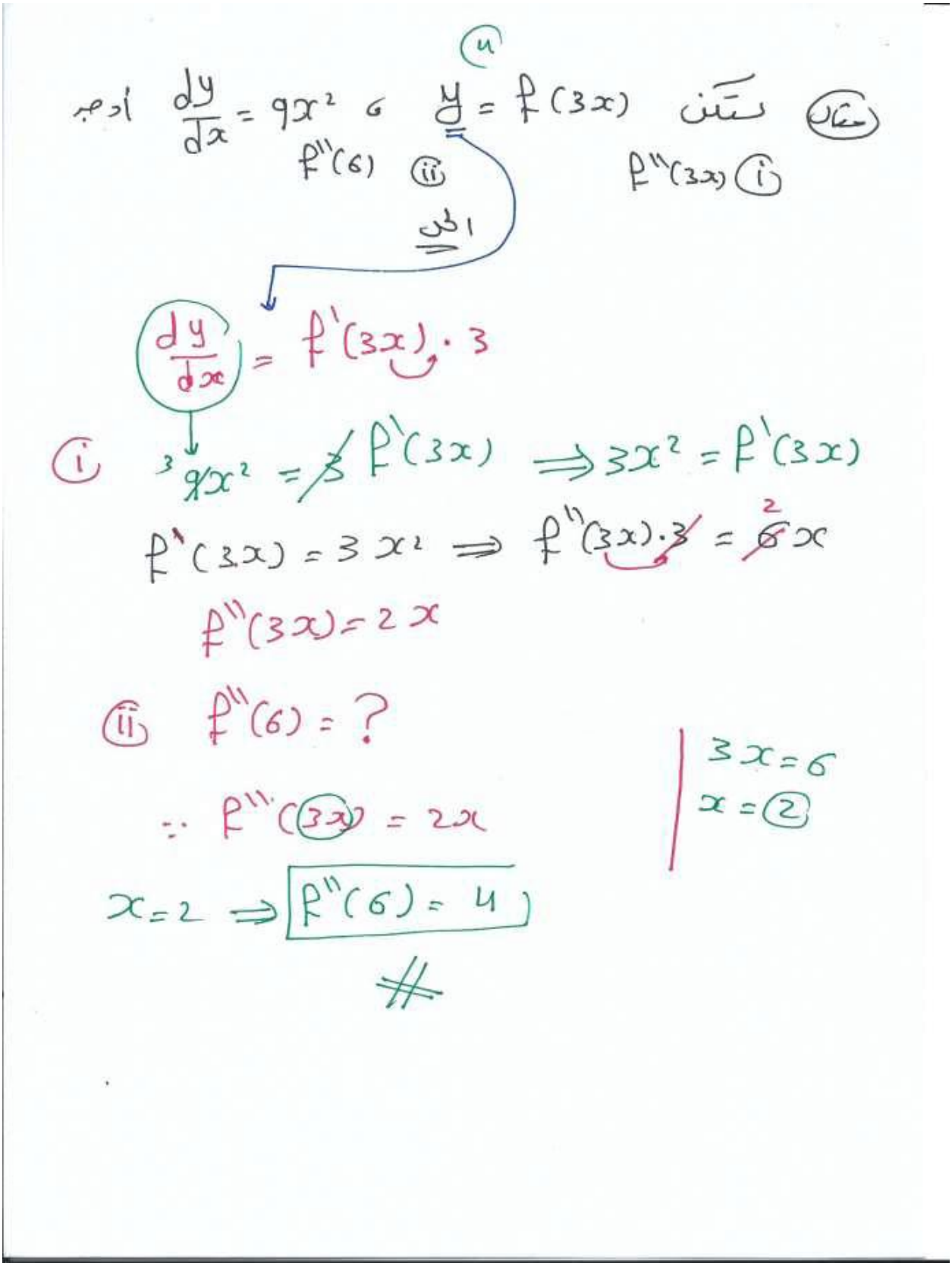
(ii) $f''(6) = ?$

$\because f''(3x) = 2x$

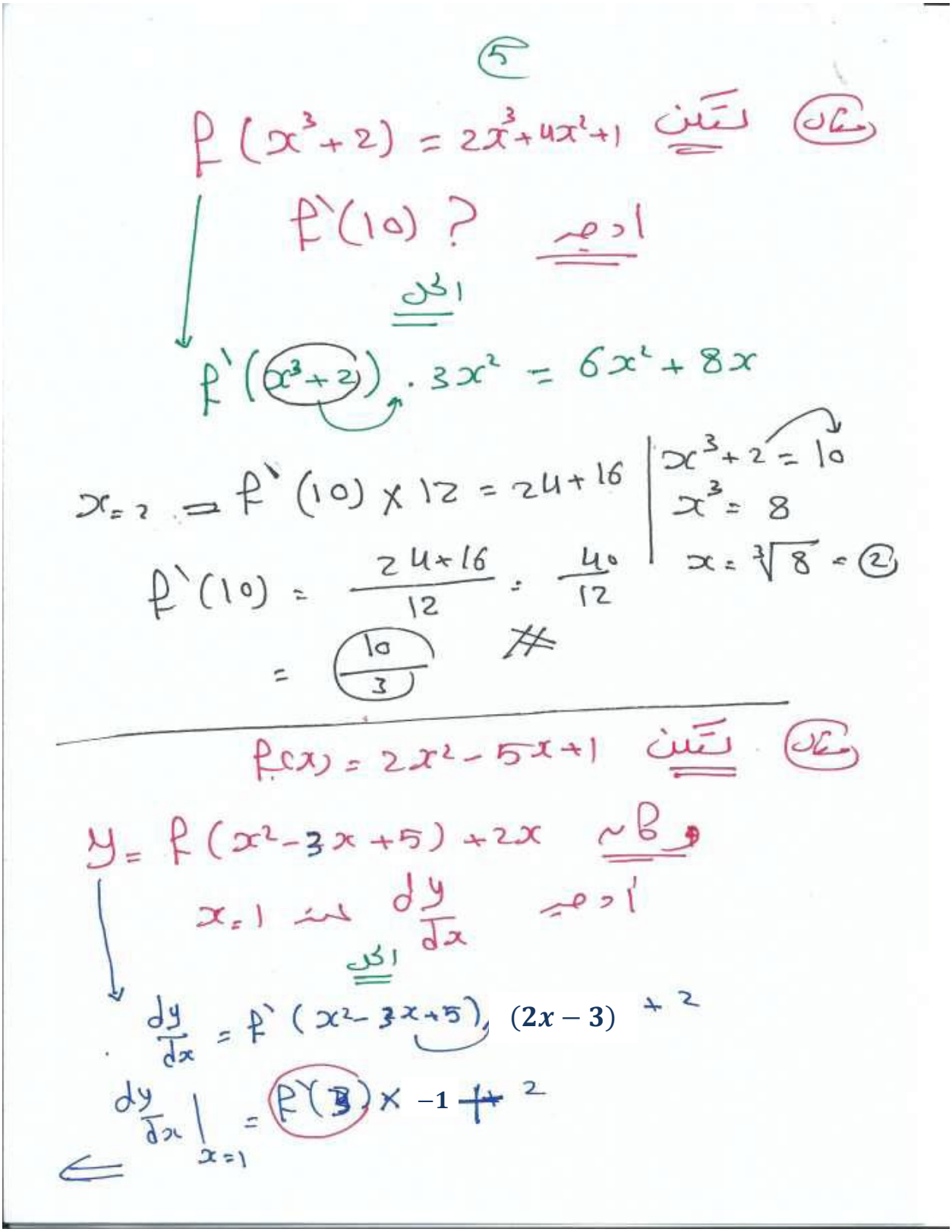
$3x = 6$

$x = 2$

$x = 2 \Rightarrow \boxed{f''(6) = 4}$



#


5
$f(x^3+2) = 2x^3+4x^2+1$ لتبين
$f'(10)$ ؟ اوجد
اكمل
$f'(x^3+2) \cdot 3x^2 = 6x^2+8x$
$x=2 \Rightarrow f'(10) \times 12 = 24+16$
$x^3+2 = 10$
$x^3 = 8$
$x = \sqrt[3]{8} = 2$
$f'(10) = \frac{24+16}{12} = \frac{40}{12}$
$= \frac{10}{3}$ #
$f(x) = 2x^2-5x+1$ لتبين
$y = f(x^2-3x+5)+2x$ نعتبر
$x=1$ عند $\frac{dy}{dx}$ اوجد
اكمل
$\frac{dy}{dx} = f'(x^2-3x+5)(2x-3)+2$
$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = f'(3) \times -1 + 2$

6

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 7 \times (-1) + 2 = -5$$

$f'(x) = 4x - 5$

$f'(3) = 12 - 5 = 7$

مثال : لتكن

$f'(x) = 2x^2 + 5$

أوجد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ حيث

$y = f(2x - 1)$

الحل

$\frac{dy}{dx} = f'(2x-1) \times 2$ | $f'(1) = 7$

$\frac{dy}{dx} = f'(1) \cdot 2$

$\frac{dy}{dx} = 7 \times 2 = 14$

#

(7)

مثال (1) لتكن $y = \tan(3 + \sin 5x)$

استخدم قاعده السلسله لايجاد $\frac{dy}{dx}$ ؟

الحل

$v = 5x$ ، $u = 3 + \sin v$ ، $y = \tan u$

$\frac{dv}{dx} = 5$ ، $\frac{du}{dv} = \cos v$ ، $\frac{dy}{du} = \sec^2 u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(3 + \sin 5x) \times \cos 5x \times 5$$

$$5 \cos 5x \sec^2(3 + \sin 5x)$$

//

حصص

(٩)

الصورة الثالثة :- حين المنحنيات البارامترية

$y = f(t) \quad , \quad x = g(t)$

$\frac{dy}{dt} = f'(t) \quad , \quad \frac{dx}{dt} = g'(t)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال أوجد معادلة المماس للمنحنى

$x = t - \sin t \quad , \quad y = 1 - \cos t \quad , \quad t = \frac{\pi}{3}$

(I) نقطة التماس

$t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.18$

$t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = 1 - \cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

النقطة $(0.18 , \frac{1}{2})$

$\Leftarrow$

١٥

ميل المماس

$$\frac{dx}{dt} = |1 - \cos t| = 1 - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$t = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{dy}{dt} = \sin t \Big| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$t = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$ ← ميل

معادلة المماس

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}(x - 0.18)$$

//

(11)

* إذا اشتقاق يعني :-

$$\frac{d}{dx}(y^n) = n y^{n-1} \frac{dy}{dx} = n y^{n-1} \cdot y'$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1} \frac{dx}{dx} = n x^{n-1}$$

Ex:- $\frac{d}{dx}(y) = y'$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y y'$$

$$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2 y'$$

$$\frac{d}{dx}(xy) = 1 \times y + y' x$$

الاشتقاق يعني

- I إيجاد $\frac{dy}{dx}$
- II إيجاد معادلة المماس والعمودي
- III الوسيط :

(12)

سؤال (I): أوجد $\frac{dy}{dx}$

① $x^2 + y^2 = 2xy$

نشتق

$2x + 2yy' = 2(1xy + y'x)$ ÷2

$x + yy' = y + y'x$

$yy' - y'x = y - x$

$y'(y-x) = (y-x)$

$\Rightarrow y' = \frac{y-x}{y-x} = 1$

---

② $x = \sin y$

نشتق

$1 = y' \cos y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$

$y' = \sec y$

#

(13)

(3) $\sqrt{2}\,xy = 3x^2+1$

$\sqrt{2}(1\times y + y'x) = 6x$ ÷ $\sqrt{2}$

$y + y'x = \frac{6}{\sqrt{2}}x$

$y'x = \frac{6}{\sqrt{2}}x - y$

$y' = \frac{\frac{6}{\sqrt{2}}x - y}{x} = \frac{6}{\sqrt{2}} - \frac{y}{x}$

(4) $\sin(2\pi x) = \cos(2\pi y)$

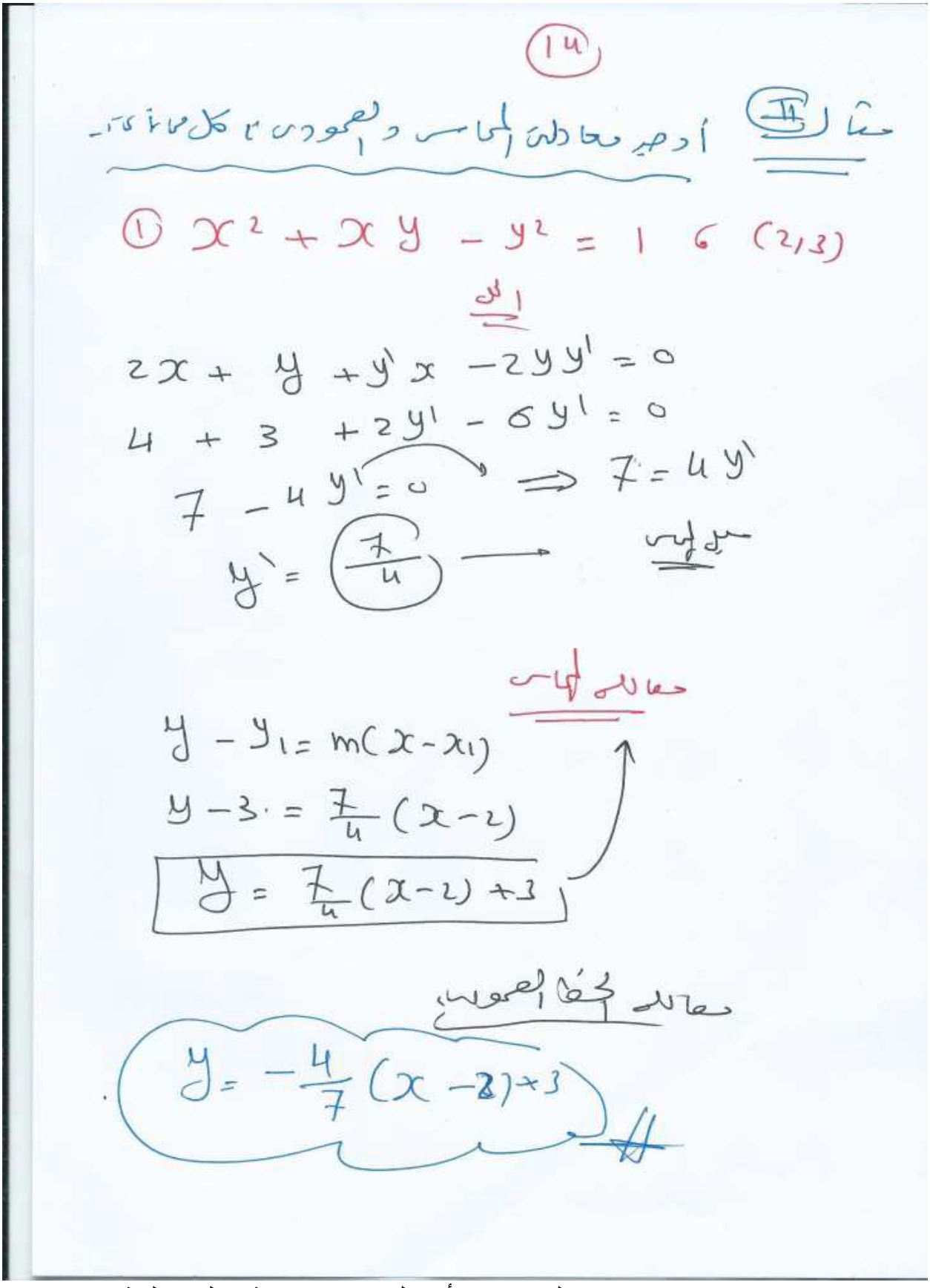
$2\pi\cos(2\pi x) = -2\pi y' \sin(2\pi y)$

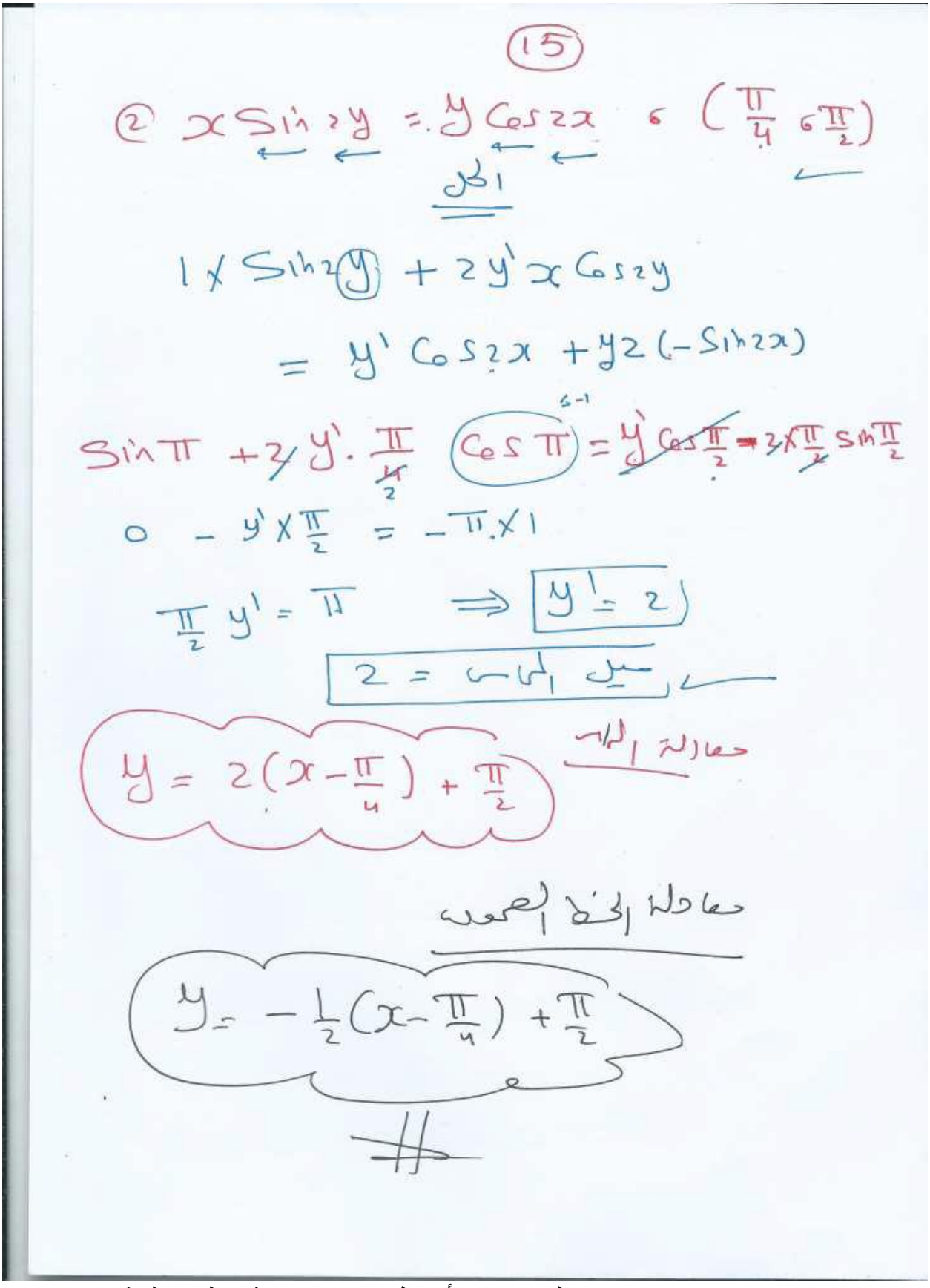
$y' = \frac{2\pi\cos 2\pi x}{-2\pi\sin 2\pi y} = -\frac{\cos 2\pi x}{\sin 2\pi y}$

(5) $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow y^2 = x^2$

$2yy' = 2x\times 1$

$y' = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$ //


(14)
مثال (14) أوجد معادلة المماس والعمودي لكل مما يأتي:
① $x^2 + xy - y^2 = 16 \quad (2,3)$
نشتق
$2x + y + y'x - 2yy' = 0$
$4 + 3 + 2y' - 6y' = 0$
$7 - 4y' = 0 \Rightarrow 7 = 4y'$
$y' = \frac{7}{4}$
ميل المماس
معادلة المماس
$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 3 = \frac{7}{4}(x - 2)$
$y = \frac{7}{4}(x-2) + 3$
معادلة العمودي
$y = -\frac{4}{7}(x-2) + 3$



(15)

② $x\sin 2y = y\cos 2x$ عند $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

نشتق

$1 \times \sin 2y + 2y' x \cos 2y$

$= y' \cos 2x + y2(-\sin 2x)$

$\sin\pi + 2y' \cdot \frac{\pi}{4} \cos\pi = y' \cos\frac{\pi}{2} - 2x\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}$

$0 - y' \times \frac{\pi}{2} = -\pi \times 1$

$\frac{\pi}{2} y' = \pi \Rightarrow \boxed{y' = 2}$

$\boxed{2 = \text{ميل المماس}}$

معادلة المماس

$y = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}$

معادلة الخط العمودي

$y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}$

#

HILAL

(١٥)

سؤال (III)

(مثال) بيّن $x^2+y^2=10$

أستنتاج

$(y')^2+y''y+1=0$

الحل

$2x+2yy'=0$

$x+yy'=0$

$1+y'y'+y''y=0$

$1+(y')^2+y''y=0$

$$\boxed{y''y+(y')^2+1=0}$$ #

HILAL

17

حلوه

مثال

لتكن

$$x^2 + y^2 = 25$$

اثبت ان

$$y'' y^3 = -25$$

الحل

$$\cancel{2}x + \cancel{2}y y' = 0$$

$$x + y y' = 0 \Longrightarrow y y' = -x \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$$

$$1 + y' y' + y'' y = 0$$

$$1 + (y')^2 + y'' y = 0$$

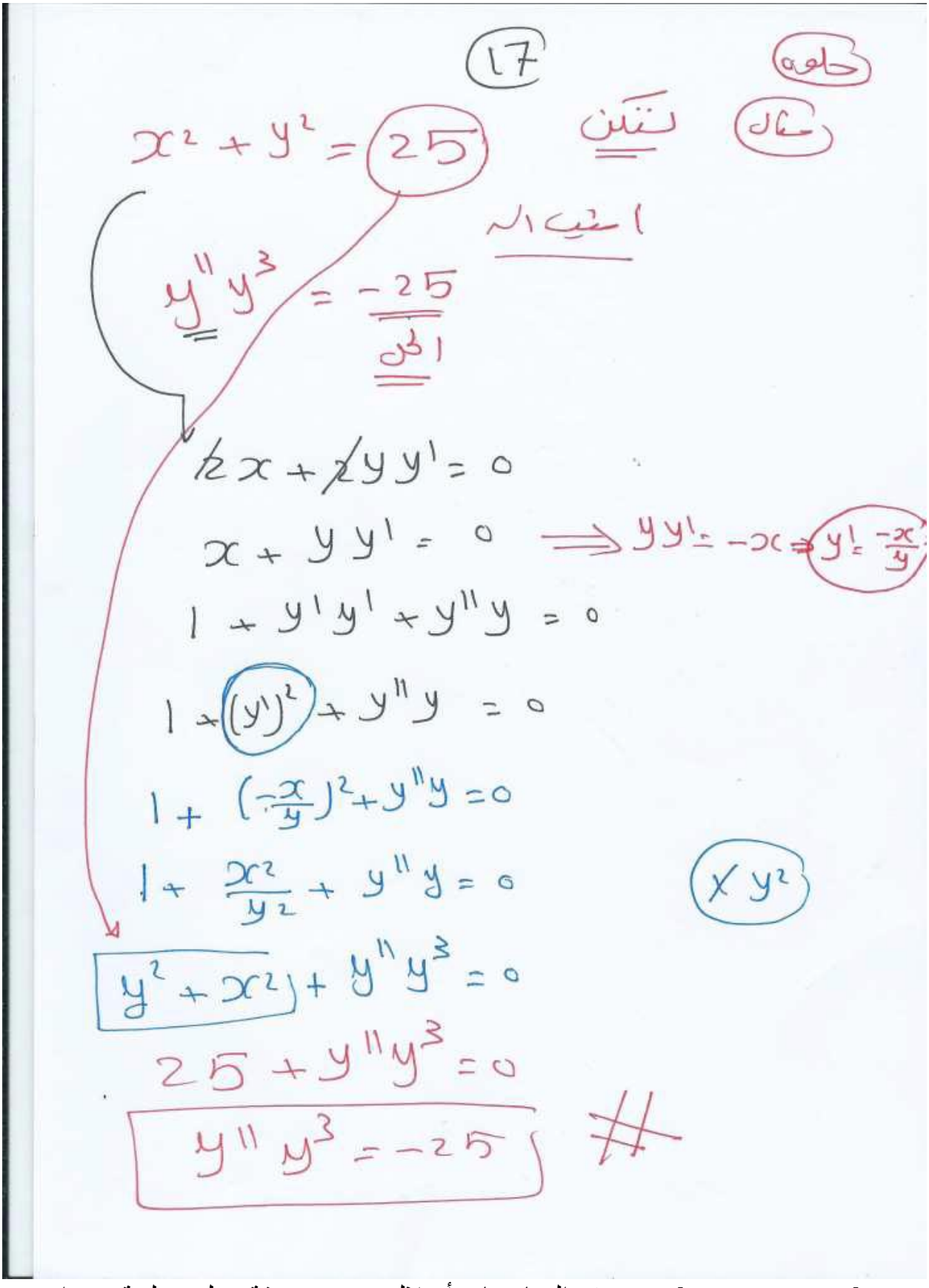
$$1 + \left(\frac{-x}{y}\right)^2 + y'' y = 0$$

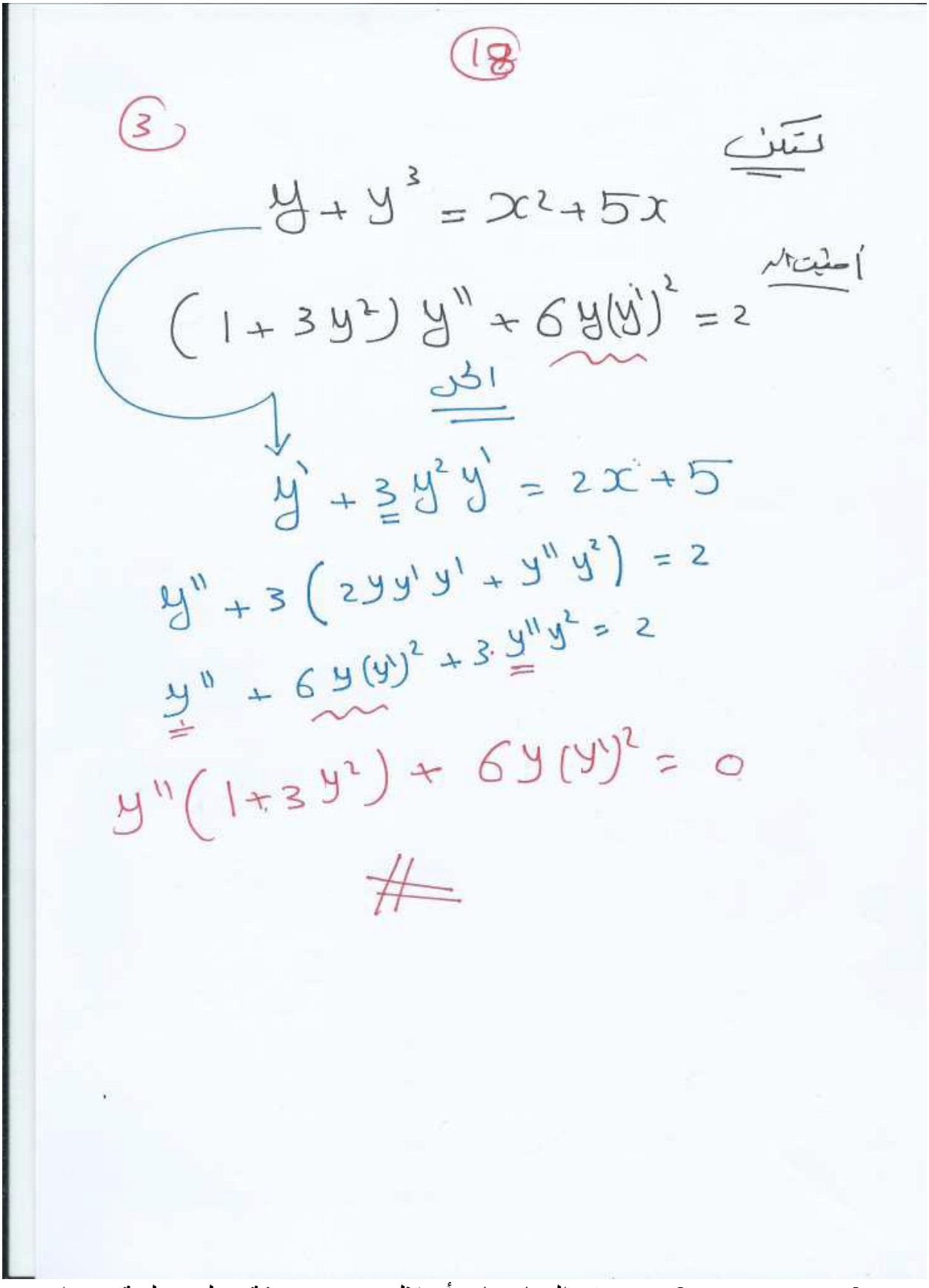
$$1 + \frac{x^2}{y^2} + y'' y = 0 \qquad \times y^2$$

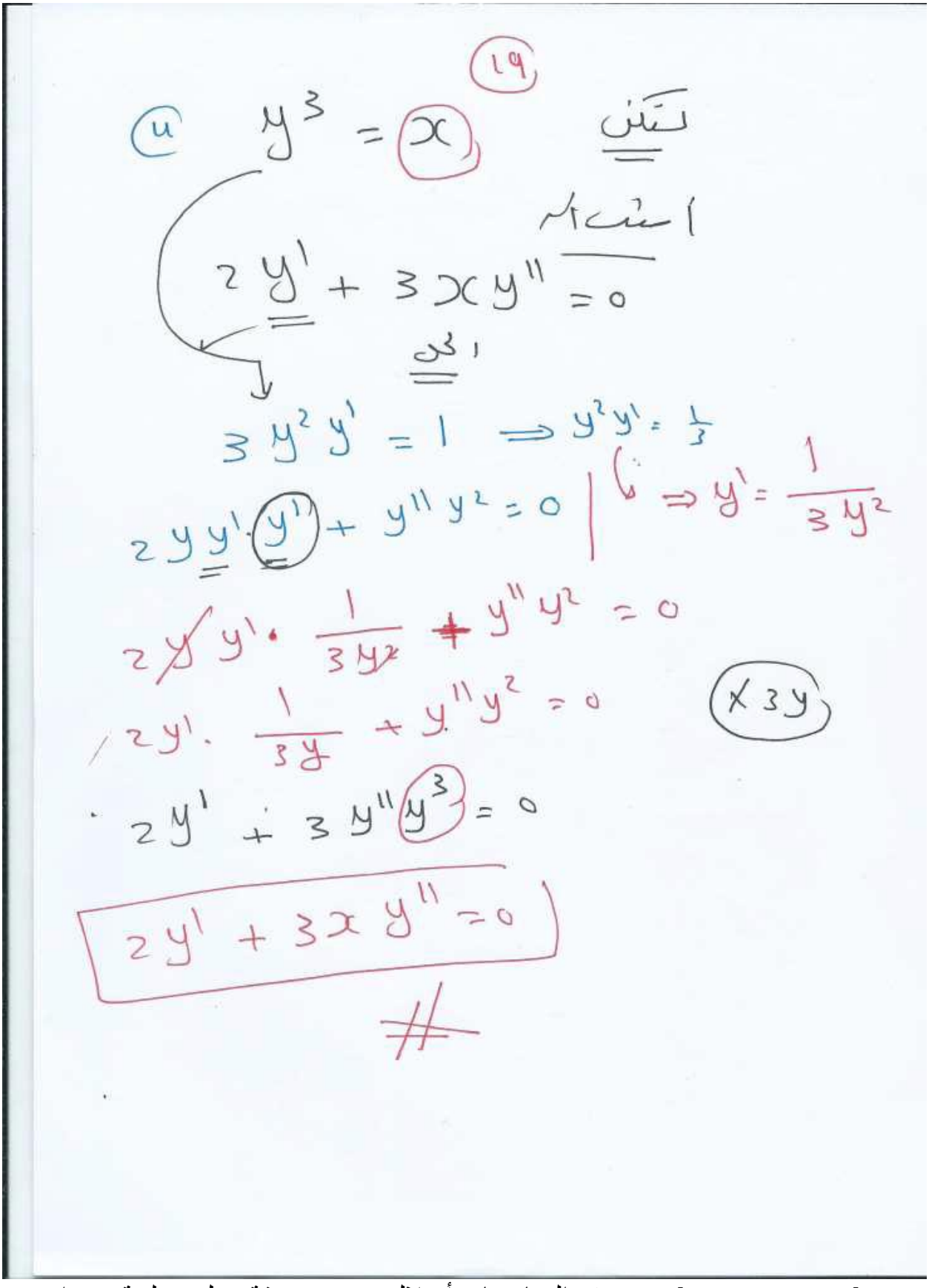
$$\boxed{y^2 + x^2} + y'' y^3 = 0$$

$$25 + y'' y^3 = 0$$

$$\boxed{y'' y^3 = -25} \quad \#$$




18
3
لتكن
$y + y^3 = x^2 + 5x$
أثبت أن
$(1+3y^2)\,y'' + 6y(y')^2 = 2$
الحل
$y' + 3y^2 y' = 2x + 5$
$y'' + 3(2yy'y' + y''y^2) = 2$
$y'' + 6y(y')^2 + 3y''y^2 = 2$
$y''(1+3y^2) + 6y(y')^2 = 0$
#


(19)
(4) $y^3 = x$
نتفاضل
$2y^1 + 3xy^{11} = 0$
$3y^2 y^1 = 1 \Rightarrow y^2 y^1 = \frac{1}{3}$
$2yy^1 \cdot y^1 + y^{11} y^2 = 0$
$\Rightarrow y^1 = \frac{1}{3y^2}$
$2y^1 \cdot \frac{1}{3y^2} + y^{11} y^2 = 0$
$2y^1 \cdot \frac{1}{3y} + y^{11} y^2 = 0$
$\times 3y$
$2y^1 + 3y^{11} y^3 = 0$
$2y^1 + 3xy^{11} = 0$

٢٠

تمرين

$$y = \sqrt{2x-5}$$

أثبت أن

$$y'' y^3 + 1 = 0$$

الحل

تربيع الطرفين

$$y^2 = 2x - 5$$

$$2yy' = 2 \Rightarrow yy' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{y}$$

$$y'y' + y''y = 0$$

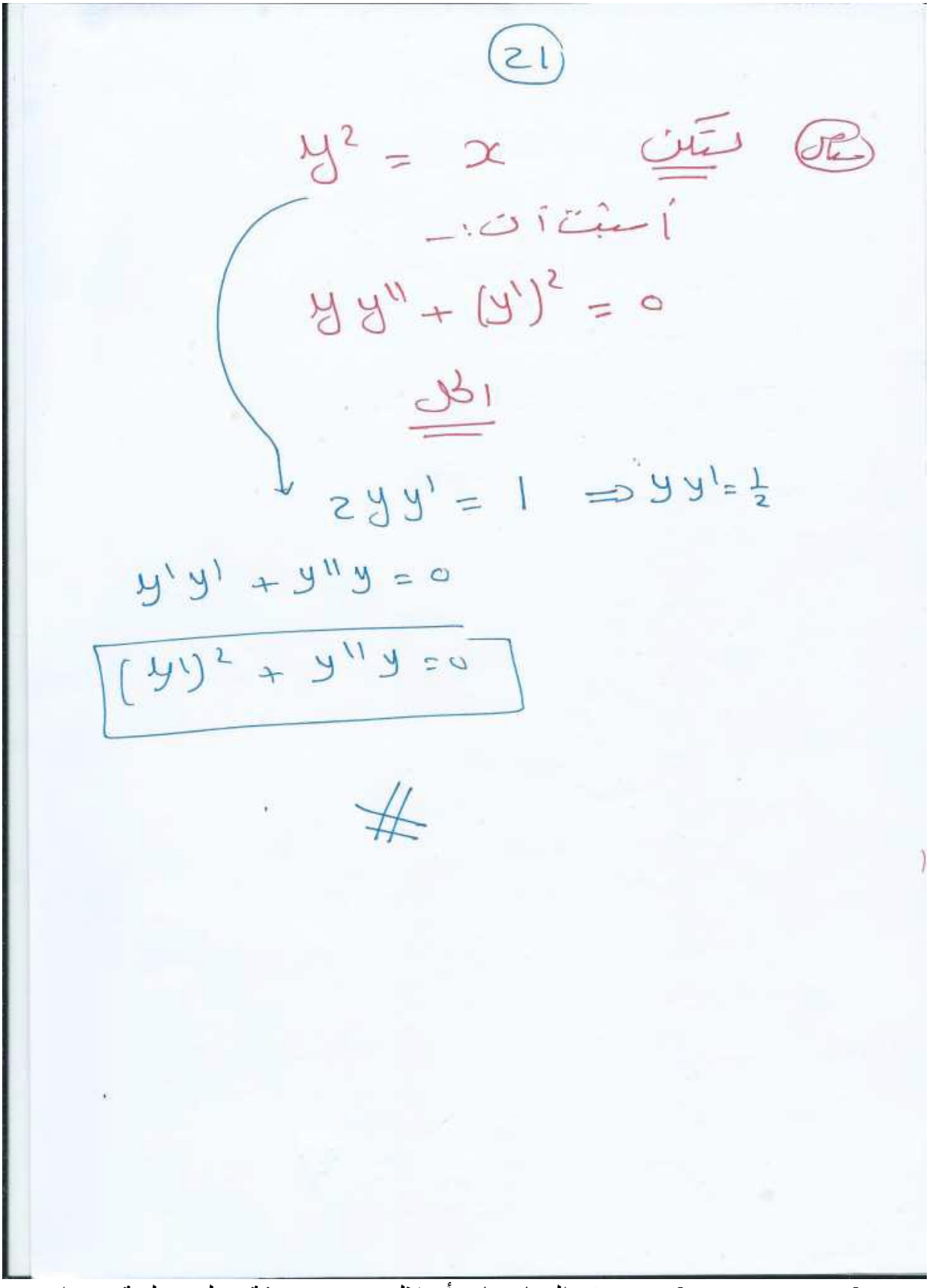
$$(y')^2 + y''y = 0$$

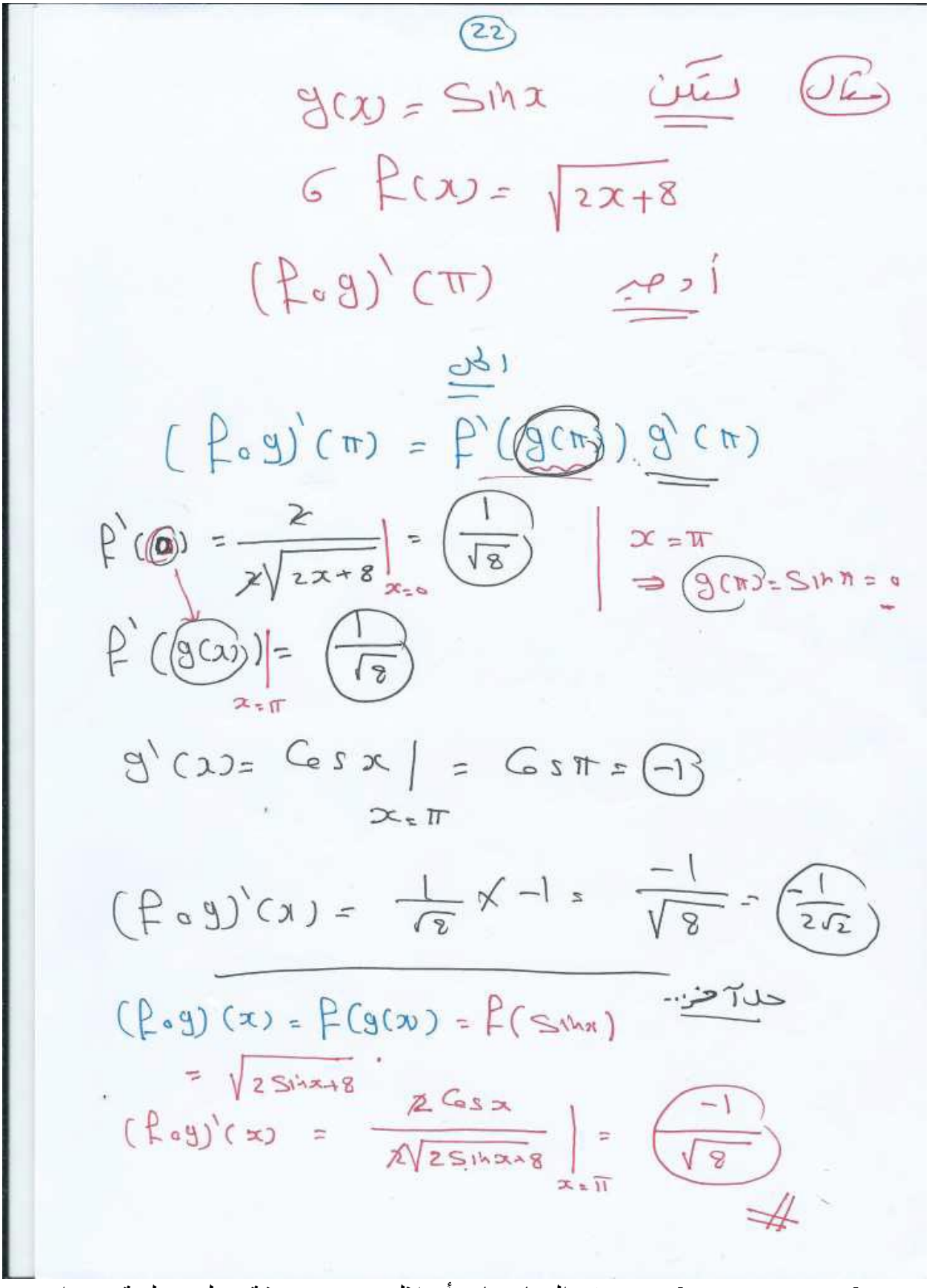
$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 + y''y = 0 \Rightarrow \frac{1}{y^2} + y''y = 0$$

بالضرب في y^2

$$\Rightarrow 1 + y''y^3 = 0$$

$$\boxed{y''y^3 + 1 = 0}$$


(21)
مثال
لتكن $y^2 = x$
أثبت أن:-
$y y'' + (y')^2 = 0$
الحل
$2yy' = 1 \Rightarrow yy' = \frac{1}{2}$
$y'y' + y''y = 0$
$(y')^2 + y''y = 0$
//


(22)
مثال
لتكن
$g(x) = \sin x$
و $f(x) = \sqrt{2x+8}$
أوجد
$(f \circ g)'(\pi)$
الحل
$(f \circ g)'(\pi) = f'(g(\pi))\, g'(\pi)$
$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+8}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{8}}$
$x = \pi$
$\Rightarrow g(\pi) = \sin\pi = 0$
$f'(g(x))\Big|_{x=\pi} = \frac{1}{\sqrt{8}}$
$g'(x) = \cos x\Big|_{x=\pi} = \cos\pi = -1$
$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{\sqrt{8}} \times -1 = \frac{-1}{\sqrt{8}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$
حل آخر...
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x)$
$= \sqrt{2\sin x + 8}$
$(f \circ g)'(x) = \frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x+8}}\Big|_{x=\pi} = \frac{-1}{\sqrt{8}}$
#

23

مثال لتكن $y = u^4$ ، $u = 2x-1$

أوجد $\frac{dy}{du}$ ، $\frac{du}{dx}$

ثم أستنتج $\frac{dy}{dx} = 8(2x-1)^3$

الحل

$\frac{dy}{du} = 4u^3$ ، $\frac{du}{dx} = 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 4u^3 \times 2 = 8u^3$

$\frac{dy}{dx} = 8(2x-1)^3$ #

(24)

$y = f(x^2)$ و $f'(x) = 3x^2 - 1$ بيّن أن $\frac{dy}{dx}$ ؟ هي

الحل

$$\frac{dy}{dx} = f'(x^2) \cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\, f'(x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\left(3(x^2)^2 - 1\right) = 2x(3x^4 - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5 - 2x$$

//

(25)

$g(\frac{1}{2}) = 2$ ، $g'(\frac{1}{2}) = 5$

$f'(2) = 5$ ، $f(2) = 7$

$(f \circ g)'(\frac{1}{2})$:المطلوب

الحل

$(f \circ g)'(\frac{1}{2}) = f'(g(\frac{1}{2})) \times g'(\frac{1}{2})$

$= f'(2) \times 5$

$= 5 \times 5 = \boxed{25}$

$\therefore (f \circ g)'(\frac{1}{2}) = \boxed{25}$

//

(26)

مثال تمرين

$g'(1)=5$ ، $g(1)=1$ ، $f'(1)=2$

$f(1)=3$

$k(x)=f(x)\cdot g(x)-f(g(x))$

أوجد $k'(1)$

الحل

$$k'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\,f(x)-f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$k'(1)=f'(1)\,g(1)+g'(1)\,f(1)-f'(g(1))\,g'(1)$$

$$=2\times1+5\times3-f'(1)\times5$$

$$=2+15-2\times5$$

$$=17-10=\boxed{7}$$

27

مثال لتكن $x = 80t$ ، $y = 64t - 16t^2$

ما قيمة t حيث تكون $\frac{dy}{dx} = 0$

الحل

$$\frac{dx}{dt} = 80 \quad ، \quad \frac{dy}{dt} = 64 - 32t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{64 - 32t}{80} = 0$$

$$\Longrightarrow 64 - 32t = 0$$

$$\Longrightarrow 64 = 32t \Rightarrow t = \frac{64}{32}$$

$$\Longrightarrow t = \boxed{2}$$

$$\boxed{t = 2} \quad \#$$

(28)

حل/ لتكن $f(x) = ax^3 + 5cx$

وكان ميل المماس لمنحنى $f(x)$ هو

$15x^2 + 5$

جد قيمة $a ، c$

الحل

الميل ← $f'(x) = 3ax^2 + 5c$

$15x^2 + 5 = 3ax^2 + 5c$

مقارنة المعاملات

$\therefore 3a = 15 \Rightarrow a = 5$

$5c = 5 \Rightarrow c = 1$

//

(29)

$P(x) = ax^2 + bx^3$ نعتبر

حيث a و b ثوابت و

$P''(2) = 11$ و $P'(1) = 2$

حدد a و b

① $P'(x) = 2ax + 3bx^2$

$P'(1) = 2$

$\Rightarrow 2a \times 1 + 3b(1)^2 = 2$

$2a + 3b = 2$ ——— (1)

$P''(x) = 2a + 6bx$ | $= 11$

$x = 2$ $x = 2$

$2a + 12b = 11$ ——— (2)

$-2a - 3b = -2$ ——— (1)

$9b = 9 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

بالتعويض في (1)

$2a + 3 = 2 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$

//

(30)

مثال: لتكن $u=ax^2+9$ ، $y=3u-7$

احسب a حيث a ثابت و $\frac{dy}{dx}=12x$

علماً انه a .

الحل

$$\frac{du}{dx}=2ax \quad , \quad \frac{dy}{du}=3$$

$$\frac{dy}{dx}=2ax\times 3=6ax$$

$$12x=6ax$$

مقارنة معاملات

$$\Rightarrow 6a=12$$

$$\Rightarrow a=\frac{12}{6}=2$$

(31)

مثال: تتحرك نقطة $a(x, y)$ على منحنى بحيث مركبتيه موقعها في اللحظة t بالمعادلتين

$x = 2t$ ، $y = t^2 + 4$ أوجد

1- ميل المماس للمنحنى عندما $t = 2$

2- موقع النقطة a عندما $\frac{dy}{dt} = 6$

3- معادلة المماس عندما $t = 2$

الحل

① $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 2$ ، $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2} = \left.2t\right|_{t=2} = 4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{(الميل)}$$

∴ ميل المماس $= 2$

② $\frac{dy}{dt} = 2t = 6 \Rightarrow t = 3$

$t = 3 \Rightarrow x = 6$

$t = 3 \Rightarrow y = 9 + 4 = 13$

الموقع $(6, 13)$

⟸

(32)

نقطة التماس

$t=2 \Rightarrow x = 4$

$t=2 \Rightarrow y = 4+4 = 8$

نقطة التماس هي $(4,8)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{x}\Big|_{t=2} = 2$$

معادلة المماس:

$$y - 8 = 2(x-4)$$

$$y = 2x - 8 + 8$$

$$\boxed{y = 2x}$$ //

(33)

مثال: إذا كان المنحنى $y = ax + bx^2$ يمر بالنقطة (1 ، 2) وميله عند نقطة التماس $= \frac{2}{3}$ أوجد a ، b

الحل

i) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = \frac{2}{3}$

$\left.a + 2bx\right|_{(1,2)} = \frac{2}{3} \Rightarrow a + 2b = \frac{2}{3}$

$a = \frac{2}{3}$

ii) $\because P(1) = 2$

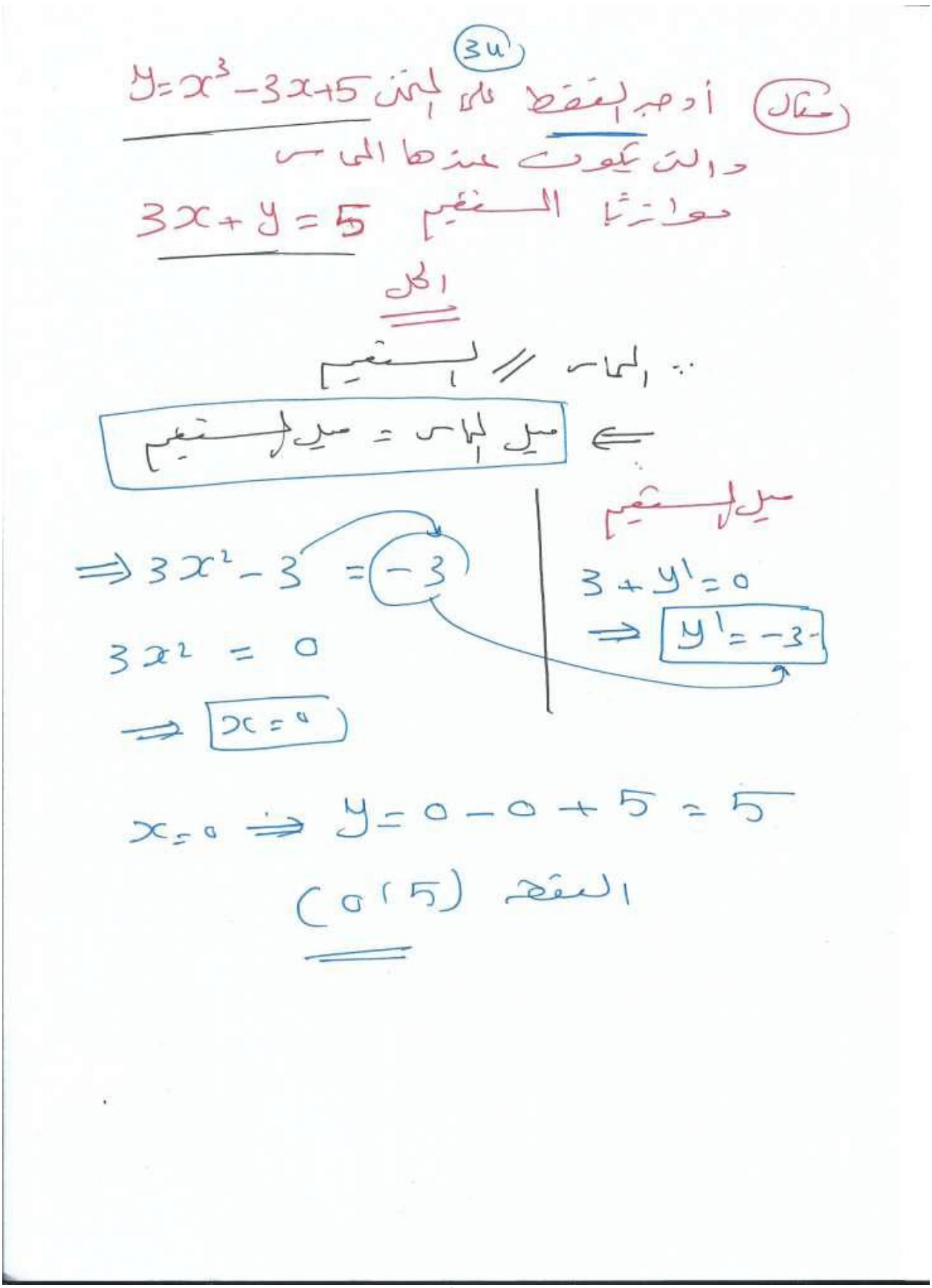
$a + b = 2$ ——— (I)

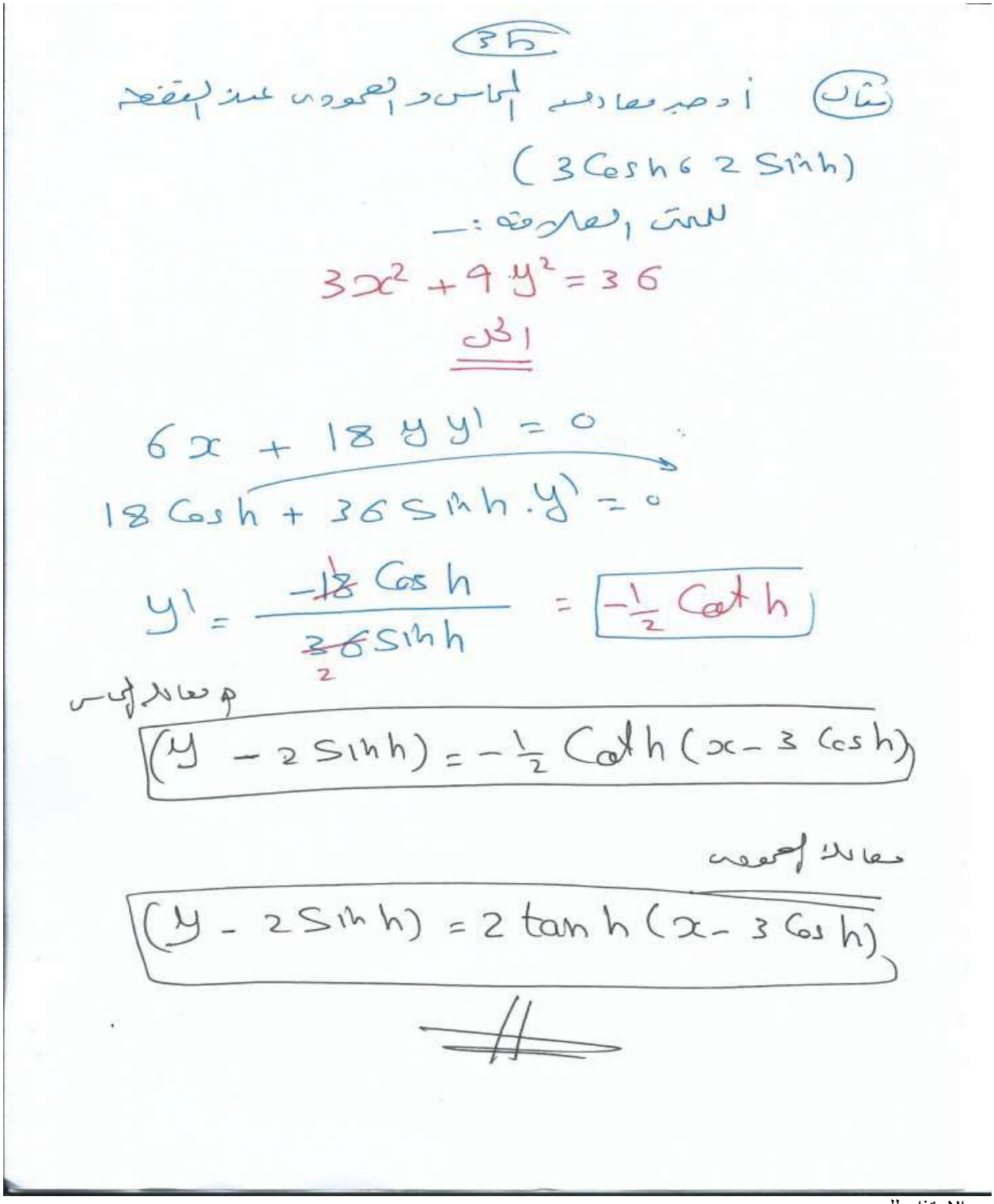
بالتعويض في (I) عن a بـ $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} + b = 2$

$b = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

//


(34)
مثال أوجد النقط على المنحنى $y=x^3-3x+5$ والتي يكون عندها المماس موازيا المستقيم $3x+y=5$
الحل
∴ المماس // المستقيم
⇐ ميل المماس = ميل المستقيم
ميل المستقيم
$3+y'=0$
$\Rightarrow y'=-3$
$\Rightarrow 3x^2-3=-3$
$3x^2=0$
$\Rightarrow x=0$
$x=0 \Rightarrow y=0-0+5=5$
النقطة (0,5)



مع الإعتذار للسهو

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح