س1 : إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[1,5]$ و كانت القيمة الصغرى لها -2 و القيمة العظمى 4 و كانت :

$m \leq \int_1^5 f(x)dx \leq n$ فما قيمة n, m ؟

....
....
....
....
....
....

س2 : إذا علمت أن : $F(x) = \frac{1}{2}sec^2(x) + \ln(x)$ ، $G(x) = \frac{1}{2}tan^2(x) + \ln(ex)$ تمثلان المشتقة العكسية للدالة $f(x)$ ، فما قيمة الثابت الذي تختلف به الدالتان $F(x)$ ، $G(x)$ ؟ ثم أوجد $f(x)$.

....
....
....
....
....
....

س3 : إذا كانت $\int_3^6 2f(x)dx = 14$ ، $\int_9^6 (f(x) + 2)dx = 4$. فاحسب قيمة : $\int_9^3 3f(x)dx$.

....
....
....
....
....
....

س4 : إذا علمت أن : $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ، فأوجد معادلة المنحنى $y = f(x)$ الذي يمر بالنقطة $(0, 1)$ و له مماس أفقي عند هذه النقطة.

س5 : لتكن $\int_0^2 f(x)dx = 12$ ، فأوجد $\int_1^0 x^2 f(2x^3)\, dx$ بالتعويض .

س6 : لتكن $f(3) = 1$ ، $f(6) = 5$ ، $\int_3^6 f(x)\, dx = 9$. أوجد $\int_1^2 xf'(3x)\, dx$.

(استخدم التعويض ثم التجزيء).

س7 : استخدم الكسور الجزئية في إيجاد : $\int_2^4 \frac{1}{(x+3)(x-1)} dx$

س8 : إذا علمت أن p عدد سكان مدينة بدائية عام 2005 هو 100000 نسمة و أن معدل تزايد عدد السكان يعطى بالعلاقة :

$p'(t) = (4 + 0.15)^{\frac{3}{2}}$. قدّر عدد سكان المدينة في بداية عام 2010 م.

....
....
....
....
....
....

س9 : إذا علمت أن : $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

(I) أثبت أن الدالة $f(x)$ ثابتة.

(II) أوجد طول القوس حيث $2 \le x \le 5$.

(III)

(IV)

....
....
....
....
....
....
....

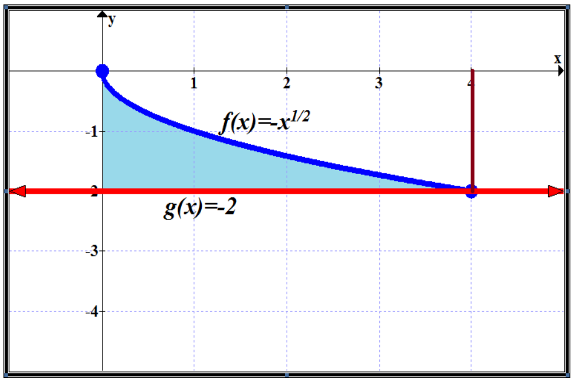
س10 : إذا علمت أن : $f(x) = cosx$ ، أوجد ما يلي :

(I) $\lim_{\|p\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(f(c_k) + \frac{2}{\pi}\right) \Delta x_k$ ، حيث P أي تجزيء على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

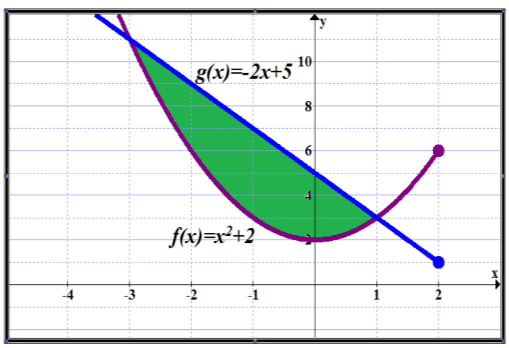
(II) أوجد القيمة المتوسطة للدالة f على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

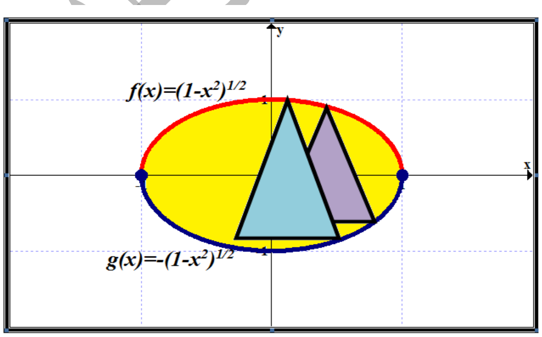
س11 : أوجد حجم المجسم الناتج من الدوران حول محور السينات للمنطقة المحدودة بالمنحنيين $g(x) = -2$, $f(x) = \sqrt{x}$ و المستقيمين $x = 4$, $x = 0$.



س12 : أوجد المساحة الكلية المظللة :



س13 : يقع المجسم بين مستويين عموديين على المحور السيني عند : $x = -1$, $x = 1$ و مقاطع العرضية المتعامدة على المحور السيني بين المستويين محصورة بين نصف الدائرة $y = -\sqrt{1 - x^2}$ و إلى نصف الدائرة $y = \sqrt{1 - x^2}$ و المقاطع العرضية هي مثلثات متساوية الأضلاع قواعدها في المستوى y , x .



س1 : إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[1,5]$ و كانت القيمة الصغرى لها -2 و القيمة العظمى 4 و كانت :

$m \le \int_1^5 f(x)dx \le n$ فما قيمة $n\,,m$ ؟

- الحل :

$$\because\ -2 \le f(x) \le 4 \quad \therefore \int_1^5 -2\,dx \le \int_1^5 f(x)dx \le \int_1^5 4\,dx$$

$$-2(5-1) \le \int_1^5 f(x)dx \le 4(5-1) \quad \therefore\ -8 \le \int_1^4 f(x)dx \le 16$$

$$\therefore m = -8 \quad , \quad n = 16$$

#

س2 : إذا علمت أن : $F(x) = \frac{1}{2}sec^2(x) + \ln(x)$ ، $G(x) = \frac{1}{2}tan^2(x) + \ln(ex)$ تمثلان المشتقة العكسية للدالة $f(x)$ ، فما قيمة الثابت الذي تختلف به الدالتان $F(x)$ ، $G(x)$ ؟ ثم أوجد $f(x)$.

- الحل :

$\because F(x) - G(x) = c$

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{2}\left(1 + tan^2(x)\right) + \ln(x) - \frac{1}{2}tan^2(x) - ln(e) - ln(x)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}tan^2(x) - \frac{1}{2}tan^2(x) - 1 = -\frac{1}{2}$$

$\because F(x) - G(x) = -\frac{1}{2}$ ثابت $\Longrightarrow\ c = -\frac{1}{2}$

$$f(x) = F'(x) = \sec(x)\ .\sec(x)\tan(x) + \frac{1}{x}$$

#

$$\therefore f(x) = sec^2(x)\tan(x) + \frac{1}{x}$$

س3 : إذا كانت $\int_{3}^{6} 2f(x)dx = 14$ ، $\int_{9}^{6}(f(x)+2)dx = 4$. فاحسب قيمة :

. $\int_{9}^{3} 3f(x)dx$

- **الحل :**

$$\because \int_{9}^{6} f(x)dx + \int_{9}^{6} 2\,dx = 4 \Longrightarrow \int_{9}^{6} f(x)\,dx = 4 + 6 = 10$$

$$\therefore \int_{3}^{6} f(x)\,dx = \frac{14}{2} = 7 \quad \because \int_{9}^{3} f(x)\,dx = \int_{9}^{6} f(x)\,dx + \int_{6}^{3} f(x)\,dx = 10 + (-7) = 3$$

$$\therefore \int_{9}^{3} 3f(x)\,dx = 3 \times 3 = 9$$

#

س4 : إذا علمت أن : $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ، فأوجد معادلة المنحنى $y = f(x)$ الذي يمر بالنقطة $(0,1)$ و له مماس أفقي عند هذه النقطة.

- **الحل :**

$$\because \frac{dy}{dx} = \int 6x\,dx \Longrightarrow \frac{dy}{dx}\; 3x^2 + c$$

$\therefore$ المماس عند $(0,1)$ أفقي

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

$$y = \int 3x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad y = x^3 + c \quad 1 = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

$$\therefore y = x^3 + 1$$

#

س5 : لتكن $\int_0^2 f(x)dx = 12$ ، فأوجد $\int_1^0 x^2 f(2x^3)\,dx$ بالتعويض .

- **الحل :**

$u = 2x^3$

$du = 6x^2\,dx$

$dx = \frac{du}{6x^2}$

$x = 1 \Rightarrow u = 2$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$\int_2^0 x^2 f(u).\frac{du}{6x^2}$

$= \frac{1}{6} \times -12 = -2$

#

س6 : لتكن $f(3) = 1$ ، $f(6) = 5$ ، $\int_3^6 f(x)\,dx = 9$. أوجد $\int_1^2 xf'(3x)\,dx$

.

(استخدم التعويض ثم التجزيء).

- **الحل :**

التعويض

$w = 3$

$dw = 3dx$

$dx = \frac{dw}{3}$

$x = 1 \Rightarrow w = 3$

$x = 2 \Rightarrow w = 6$

$\int_3^6 xf`(w)\frac{dw}{3}$

$\int_3^6 \frac{w}{3} f`(w)\frac{dw}{3}$

$\int_3^6 \frac{1}{9} w\, f`(w)\, dw$

$\therefore\ x = \frac{w}{3}$

$u = \frac{1}{9} w$ $\qquad\qquad$ $dv = f^{`}(w)\, dw$

$du = \frac{1}{9} dw$ $\qquad\qquad$ $v = f(w)$

$$\int_3^6 \frac{1}{9} w f^{`}(w)\, dw = \left[\frac{1}{9} w f(w)\right]_3^6 - \frac{1}{9}\int_3^6 f(w)\, dw$$

$$= \frac{1}{9} \times 6f(x) - \frac{1}{9} \times 3f(3) - \frac{1}{9} \times 9$$

$$= \frac{2}{3} \times 5 - \frac{1}{3} \times 1 - 1 \ = 2$$

$\therefore\ \int_1^2 x f^{`}(3x)\, dx = 2$

#

س7 : استخدم الكسور الجزئية في إيجاد : $\int_2^4 \frac{1}{(x+3)(x-1)} dx$

- الحل :

$$\frac{1}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-1)}$$

$$1 = A(x-1) + B(x+3)$$

$$x = -3 \quad \Rightarrow \quad 1 = -4A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4}$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 4B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{4}$$

$$\int_2^4 f(x)\, dx = -\frac{1}{4}[ln|x+3|]_2^4 \ + \frac{1}{4}[ln|x-1|]_1^5$$

$= ----------------------$

#

س8 : إذا علمت أن P عدد سكان مدينة بدائية عام 2005 هو 100000 نسمة و أن معدل تزايد عدد السكان يعطى بالعلاقة :

$P`(t) = (4+0.15)^{\frac{3}{2}}$. قدّر عدد سكان المدينة في بداية عام 2010 م.

- **الحل :**

$$P = (4+0.15)^{\frac{3}{2}}\, t + c$$

$$100000 = (4+0.15)^{\frac{3}{2}} \times 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 100000$$

$$P = (4+0.15)^{\frac{3}{2}}\, t + 100000 \implies P|_{t=5} = (4+0.15)^{\frac{3}{2}} \times 5 + 100000$$

$$P|_{t=5} = 100042 \text{ نسمة}$$

#

س9 : إذا علمت أن : $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

(V) أثبت أن الدالة $f(x)$ ثابتة.

(VI) أوجد طول القوس حيث $2 \le x \le 5$.

- **الحل :**

(I)

$$f`(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times \frac{-1}{x^2}$$

$$f`(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$\therefore$ الدالة f ثابتة

(II)

$$L = \int_2^5 \sqrt{1+(0)^2}\; dx$$

$$L = (1)(5-2) = 3 \quad \text{وحدة طول}$$

#

س10 : إذا علمت أن : $f(x) = cosx$ ، أوجد ما يلي :

(III) $\lim_{\|p\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(f(c_k) + \frac{2}{\pi}\right) \Delta x_k$ ، حيث P أي تجزيء على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(IV) أوجد القيمة المتوسطة للدالة f على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- الحل :

(I)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\, dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

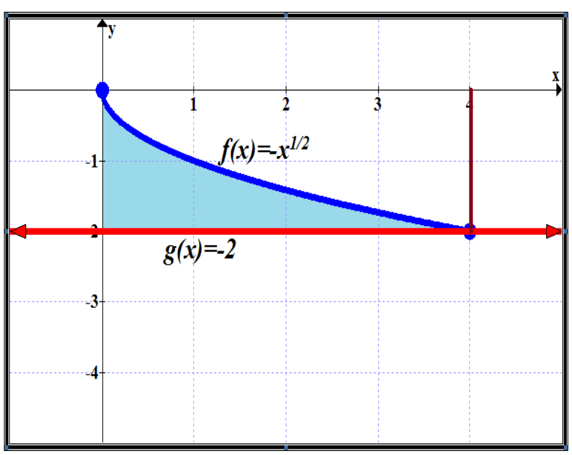
$$[\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 1 \quad = \quad 1 + 1 = 2$$

(II)

$$av(f) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx \ = \frac{2}{\pi}[1] = \frac{2}{\pi}$$

#

س11 : أوجد حجم المجسم الناتج من الدوران حول محور السينات للمنطقة المحدودة بالمنحنيين
$g(x) = -2$, $f(x) = \sqrt{x}$ و المستقيمين $x = 4$, $x = 0$



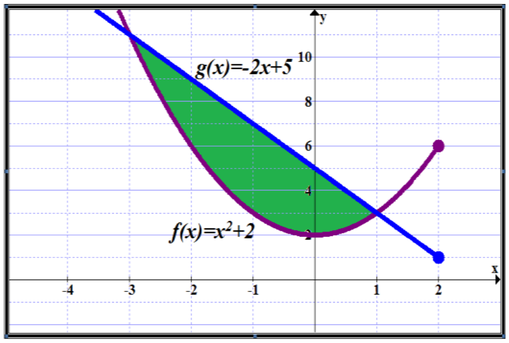
$$R = 2 \ , r = \sqrt{x} \ \Rightarrow V = \pi \int_0^4 (4 - x)\, dx$$

$$V = \pi \left[4X - \frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$\therefore V \ = \pi(16 - 8) = 8\pi$ وحدة حجم

#

س12 : أوجد المساحة الكلية المظللة :



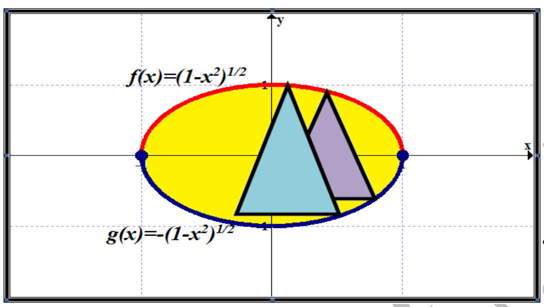
$$A = \int_{-3}^{1} (-2x + 5 - x^2 - 2 \ ) \, dx$$

$$A = \int_{-3}^{1} (3 - x^2 - 2x \ ) \, dx$$

$$A = \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} = \frac{5}{3} + 9 = \frac{32}{3}$$ وحدة حجم

#

س13 : يقع المجسم بين مستويين عموديين على المحور السيني عند : $x = -1 \quad , \quad x = 1$ و مقاطع العرضية المتعامدة على المحور السيني بين المستويين محصورة بين نصف الدائرة $y = -\sqrt{1 - x^2}$ و إلى نصف الدائرة $y = \sqrt{1 - x^2}$ و المقاطع العرضية هي مثلثات متساوية الأضلاع قواعدها في المستوى $x \ , \ y$



∵ مساحة المثلث المتطابق الأضلاع = $A = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$

طول ضلع المثلث المتطابق الأضلاع = $L = 2\sqrt{1 - x^2}$

$\sqrt{3}(1 - x^2)$

$$\therefore V = \sqrt{3} \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \, dx = \sqrt{3} \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \sqrt{3} \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$ وحدة حجم

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

و لا تنسونا من دعواتكم

كل عام و أنتم بخير