مجلس أبوظبي للتعليم
Abu Dhabi Education Council
Education First التعليم أولاً

مدرسة زايد الأول الثانوية

قاعــدة لوبيــتال

في النهايات

الرياضيات

أ.هــلال حســين

مع تحياتي أ.هلال حسين

.. قاعدة لوبيتال ..

عندما يتعذر إيجاد نهاية خارج قسمة دالتين بالطرق المباشرة التي مفادها أن نهاية خارج قسم دالتين تساوي خارج قسمة نهاية كل من الدالتين.

لابد من التفكير في طرق أخرى.

و قاعدة لوبيتال تمكننا من حساب تلك النهاية التي تأخذ إحدى الصور غير المحددة :

$$\frac{\boldsymbol{Zero}}{\boldsymbol{Zero}} \quad \text{أو} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

نظرية لوبيتال :

☑ إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ قابلتان للاشتقاق في الفترة $]a,b[$ ، $h \in]a,b[$ ، $lim_{x\to h} f(x) = 0$ ، $lim_{x\to h} g(x) = 0$ ، و كانت $lim_{x\to h}\frac{g`(x)}{f`(x)}$ موجودة ، فإن : $\boldsymbol{lim_{x\to h}\frac{g`(x)}{f`(x)}} = \boldsymbol{lim_{x\to h}\frac{g(x)}{f(x)}}$

- مثال 1 :

- أوجد $\boldsymbol{lim_{x\to 0}\frac{x+sin2x}{x-sin2s}}$

الحل :

واضح أن كلاً من البسط و المقام يقترب من الصفر عندما تقترب x من الصفر. و البسط و المقام قابل للاشتقاق و مشتقة البسط هي

$1 + 2cos2x$: و لا تقترب من الصفر عندما تقترب x من الصفر و كذلك فإن مشتقة المقام هي $1 - 2cos2x$ و لا تقترب من الصفر عندما تقترب x من الصفر و من ثم فيمكن تطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{x + sin2x}{x - sin2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + 2cos2x}{1 - 2cos2x} = \frac{1+2}{1-2} = -3$$

✓نظرية :

إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ قابلتان للاشتقاق ، $lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ، $lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ ، و كانت $lim_{x\to\infty}\frac{g`(x)}{f`(x)}$ موجودة ، فإن :

$$lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = lim_{x\to\infty}\frac{g`(x)}{f`(x)}$$

- مثال 2 :

– احسب $lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - tan^{-1}x}{e^{-x}}$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - tan^{-1}x}{e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = e^{\infty} = \infty$$

- **مثال 3 :**

– وضح هل الحل المتبع فيما يلي صحيح و لماذا ؟

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}=\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}=\frac{6x-2}{6x-4}=2$$

- الحل السابق رياضياً ليس صحيحًا على الرغم من إتباع الخطوات الأساسية و لكن إسقاط كتابة ■ $\lim_{x\to1}$ في مكانها تجعل التقرير السابق خطأ و يجب أن تكون الكتابة على النحو التالي :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}=\lim_{x\to1}\frac{6x-2}{6x-4}=2$$

- **مثال 4 :**

– وضح إلى أي مدى يكون الحل التالي صحيحًا :

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}=\lim_{x\to2}\frac{6x-2}{6x-6}$$
$$=1$$

- الحل المعطى خطأ و ذلك لأنه على الرغم من أن الانتقال من النهاية المعطاة إلى الخطوة التالية عن طريق استعمال قاعدة لوبيتال صحيحًا لأن النهاية المعطاة لها الصورة الغير محددة $\frac{Zero}{Zero}$ و لكن النهاية الناتجة بعد ذلك $\lim_{x\to2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}$ ليست على الصورة الغير محددة $\frac{Zero}{Zero}$ و إذا عوّضنا مباشرة لوجدنا أن

مع تحياتي أ.هلال حسين

قيمة النهاية هي $\frac{7}{3}$ و الخطوات التالية لتلك الخطوة أيضًا خطأ لتطبيق قاعدة لوبيتال على نهاية لا تخضع (أو لا تحقق الشروط الواردة للقاعدة.

الخطأ السابق التنويه عنه خطأ شائع فلا تقع فيه.

✓نظرية :

إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ قابلتان للاشتقاق في فترة $]a,b[$ و كانت $\hbar \in]a,b[$ ، $lim_{x\to\hbar} f(x) = \infty$ ، $lim_{x\to\hbar} g(x) = \infty$ و كانت $lim_{x\to\hbar}\frac{g`(x)}{f`(x)}$ موجودة ، فإن :

$$\lim_{x\to\hbar}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\hbar}\frac{g`(x)}{f`(x)}$$

- **مثال 5 :**

– احسب $lim_{x\to 0}\frac{lnsinx}{lntanx}$

الحل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{lnsinx}{lntanx} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{cosx}{sinx}}{\frac{sec^2x}{tanx}} = \lim_{x\to 0} cos^2x = 1$$

مثال 6:

- احسب $lim_{x\to 0}\frac{cotx}{cot3x}$

واضح أن :

$$lim_{x\to 0}\frac{cotx}{cot2x} = lim_{x\to 0}\frac{-csc^2x}{-2csc^2 2x} = lim_{x\to 0}\frac{2csc^2x\ \ cotx}{4csc^2 2x\ cot2x}$$

لاحظ أننا طبقنا النظرية الخاصة بالصورة $\frac{\infty}{\infty}$ واضح أنه بعد ذلك ستتعقد المسألة و لذلك فإننا نلجأ إلى تبسيط المسألة باستعمال تعويضات مثلثيه من الأصل.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{cotx}{cot2x} = \lim_{x\to 0}\frac{tan2x}{tanx} = \lim_{x\to 0}\frac{2sec^2 2x}{sec^2x} = 2$$

- ## مثال 7:

- احسب النهاية التالية $lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$ و لاحظ بدقة ما ستجده.

<u>الحل :</u>

واضح أن : $lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} = lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \dots$

أي أن الاشتقاق لا يؤدي إلى حل المسألة و لكنه يؤدي إلى نفس المسألة بعد خطوتين و لكن بالطبع حل هذه المسألة بالطريق العادي أسهل.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2}{x^2}+1} = 1$$

مع تحياتي أ.هلال حسين

------------------------*------------*------------*

❖ ناقشنا حتى الآن الحالتين $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{Zero}{Zero}$ و لكن هناك بالإضافة إليهما خمس حالات أخرى هي :

$$(0 \times \infty ، \infty - \infty ، 0^0 ، \infty^0 ، 1^\infty)$$

سنناقش فيما يلي كيفية التعامل مع الخمس حالات الباقية و كيفية تحولها إلى إحدى الحالتين $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{Zero}{Zero}$ عن طريق عرض الأمثلة التالية :

- مثال 1 :

– احسب $lim_{x\to 0}(sec^3 2x)^{cot^2 3x}$

الحل :

هذه النهاية على الصورة 1^∞ لذلك نفرض $y = (sec^3 2x)^{cot^2 3x}$

و من ثم $lny = cot^2 3x \; lnsec^3 2x = \frac{3lnsec2x}{tan^2 3x}$

و واضح أن $lim_{x\to 0} lny$ هي من النوع $\frac{Zero}{Zero}$ و من ثم فإن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\,ln\,sec2x}{tan^2 3x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6tan2x}{6tan3x\;sec^2 3x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{tan2x}{tan3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{sec^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{tan2x}{tan3x} = \frac{2}{3}$$

أي أن $ln_{x\to 0}\, y = \frac{2}{3}$ و من ثم فإن $lim_{x\to 0}\, y = e^{(2/3)}$

#

مع تحياتي أ.هلال حسين

- مثال 2:

- احسب $lim_{x\to 1}\, x^{(1/x-1)}$

الحل :

(هذه من النوع 1^{∞})

نفرض $y = x^{(1/x-1)} \quad \Leftarrow \quad \ln y = \frac{1}{x-1}\ lnx$

$lny = \frac{lnx}{x-1}$ و هي من النوع $\frac{Zero}{Zero}$

$$\therefore \lim_{x\to 1} lny = \lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} y = e^{1}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}(x)^{(1/x-1)} = e^{1}$$

#

- مثال 3 :

- احسب $lim_{x\to 0}(x)^{sinx}$

(هذه من النوع $\frac{Zero}{Zero}$)

لتكن $y = x^{sinx} \quad \Leftarrow \quad \ln y = sinx\ \ lnx \quad \Leftarrow \quad lny = \frac{lnx}{cscx}$

هذه من النوع $\frac{\infty}{\infty}$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\csc x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{-x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{x\sin x - \cos x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \ln y = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} x^{\sin x} = 1$$

#

- مثال 4 :

– احسب $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\sec 2x$

الحل :

هذه النهاية على الصورة $\infty \times 0$ فنحولها كما يلي :

و هي على $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\sec 2x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\cos 2x}$

الصورة $\frac{Zero}{Zero}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\sec^2 2x}{-2\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sin 2x \cos^2 x} = 1$$

#

- مثال 5 :

– احسب $lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

الحل :

هذه على الصورة $\infty-\infty$ و تحول كما يلي :

$lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x\,(e^x-1)}\right)$ و هذه على الصورة $\frac{Zero}{Zero}$

$$\therefore=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+2e^x}=\frac{1}{2}$$

#

- مثال 6 :

– احسب $lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tanx)^{cosx}$

الحل :

هذه من النوع ∞^0 لذلك :

نفرض $y=\ (tanx)^{cosx}$

$$\Rightarrow\quad lny=\ cosx\ lntanx=\frac{lntanx}{secx}$$

$\therefore\ lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{lntanx}{secx}$ من النوع $\frac{\infty}{\infty}$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} lny$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{lntanx}{secx}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sec^2x \div tanx}{secx\ tanx} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sin^2x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} lny = 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (tanx)^{cosx} = 1$$

#

مع تحياتي أ.هلال حسين