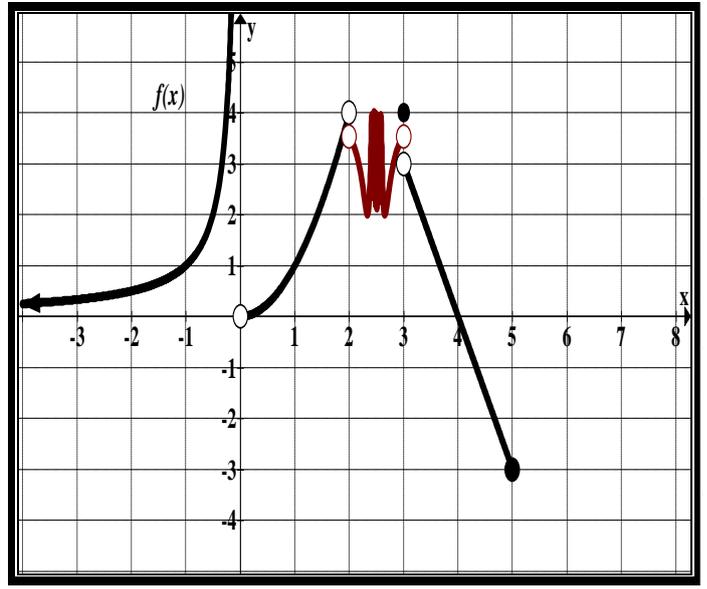
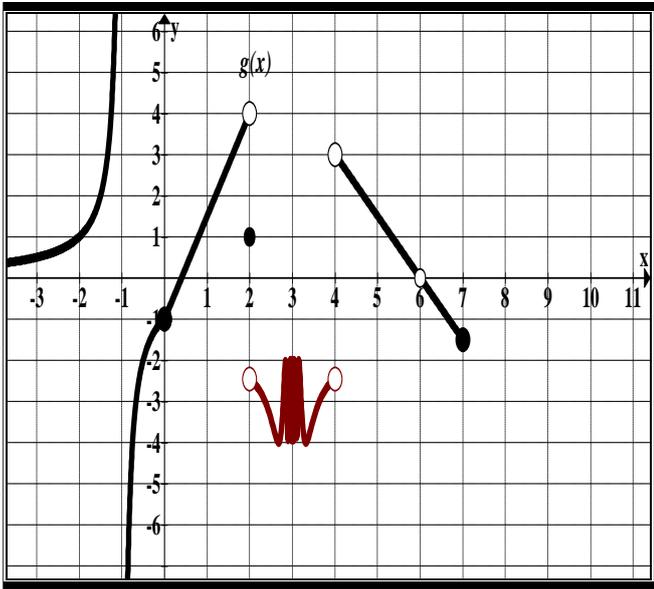


المراجعة النهائية لدخول الإمتحان

أعداد : أ. هلال حسين... خليفة بن زايد

السؤال الاول :-

(1) إعتماذ على الرسومات البيانية التي تمثل الدوال الآتية: $f(x), g(x)$:-



(i) أكمل الجدول التالي :-

$g(x)$	$f(x)$	الدالة
		م. نقاط انفصال بسبب وجود قفزة
		م. نقاط انفصال لانتهائي
		م. نقاط انفصال يمكن التخلص منها
		م. نقاط انفصال تذبذبي
		نهاية الدالة عند $x = 1$
		ميل المماس عند $x = 4$
		قيم x التي تكون الدالة عندها غير قابلة للإشتقاق
		معدل التغير عند $x = 4$

		معدلاشارة التغير عند $x = 1$
		سبب انفصال الدالة عند $x = 2$
		قيم x التي تكون عندها فقط النهاية لجهة اليسار موجودة
		قيم x التي تكون النهاية عندها غير موجودة

(ii) من الرسم السابق اوجد مايلي :-

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow a \in \dots \dots \dots$

(2) $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \text{موجودة} \Rightarrow c \in \dots \dots \dots$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x + 1} \dots \dots \dots$

(4) $\lim_{x \rightarrow 4} (g(x) + f(x)) \dots \dots \dots$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x)}) \dots \dots \dots$

(2) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$

حتى تصبح متصلة عند $x = 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثاني :-

أوجد نهاية الدوال التالية :-

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x + \frac{|x|}{x} \right)$

(غير موجودة)

(ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$

$\left(\frac{1}{4}\right)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + x \cos x}{2x}$

$\left(\frac{5}{2}\right)$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{(x-2)^2} - 2}{x-4}$$

(1)

السؤال الثالث :-

(i) إذا كانت $f(x) = 2x + \sin(5x)$ استخدم تعريف المشتقة لبيان أن $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

(ii) لتكن $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \cos 2x & : x \geq \frac{\pi}{4} \\ a + bx & : x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

احسب قيمة كل من الثابتين a, b

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(iii) لتكن: $S(t) = t^3 - 6t^2$ يتحرك كل جسيم الموقعدالة هي

حيث t وبالثواني S بالامتار . أوجد السرعة اللحظية (V) والسرعة العددية ($|V|$) والعجلة (a) للجسيم في نهاية الثانية الأولى من حركة .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الرابع :-

(i) : لتكن $f(3x^3) = 6x^3 - 18x^2$ ، فأوجد $f'(-3)$

.....

.....

.....

.....

(ii) أوجد معادلة كل من المماس والعمودي على المماس للمنحنى

$y = \sqrt{2} \cos x$ عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, 1)$

.....

.....

.....

.....

(iii) لتكن : $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 , & x \geq 2 \\ bx - 5 , & x < 2 \end{cases}$

حيث a و b ثابتان أوجد القيم لكل من a و b التي تجعل f متصلة وقابلة للاشتقاق .

.....

.....

.....

.....

(iv) إذا كانت $f(x) = ax^3 - 7x^2 + 8$ وكانت

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = 12$$

أوجد قيمة الثابت a

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الخامس :-

(i) إذا كانت: $f'(-2) = 10$ و $g'(-1) = 0$ و $g(-1) = 1$

وكان: $h(x) = f(2x^2 - 4g(x))$ فأوجد $h'(-1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(ii) أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $t = 4$ للدالة المعرفة بارامترياً كالآتي :

$$x = \sqrt{t} \quad , \quad y = (t - 3)^2$$

ثم أوجد معادلة خط المماس المرسوم لمنحني هذه الدالة عند $t = 4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(iii) أوجد $-\frac{dy}{dx}$

(1) $y = (x^2 + 3)^5$

.....

.....

.....

.....

(2) $y = (3 + \sec x)^6$

.....

.....

.....

.....

$$(3) y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

$$(4) y = \cot(2x + 5)$$

(iv) لتكن

$$f(x) = u^5 + 1, u = g(x) = \sqrt{x}, x = 1$$

قيمة أوجد $(f \circ g)$ عند نفس النقطة

السؤال السادس :-

(i) لتكن $2y^3 = 3x^2$ أثبت أن :

$$\frac{1}{y} = 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

x (ii)	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	$\frac{1}{3}$
1	3	-4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$

أحسب قيم المشتقات بالنسبة إلى x عند قيم x المعطاة الدوال المركبة :

$$\frac{d}{dx} (5f(x) - g(x)), x = 1 \quad (1)$$

.....

.....

.....

.....

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) \quad (2)$$

.....

.....

.....

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)+1}\right), x=1 \quad (3)$$

.....

.....

.....

مع أطيب التمنيات لجميع الطلاب والطالبات بالنجاح والتوفيق

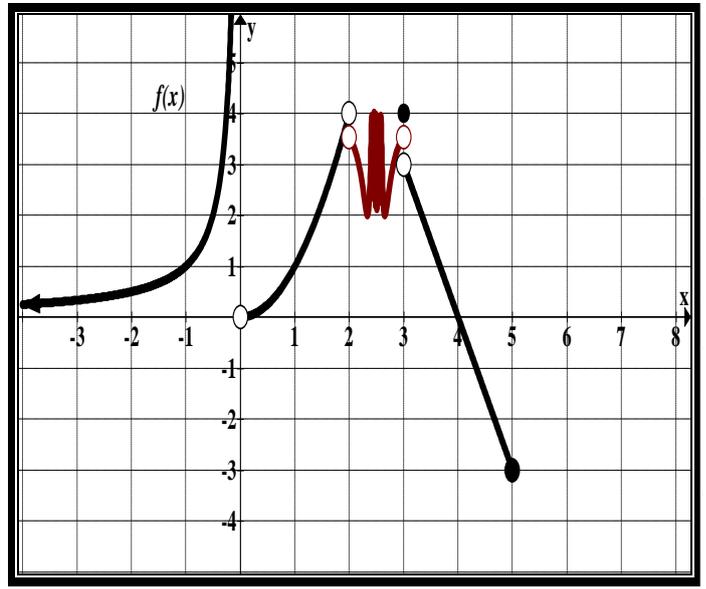
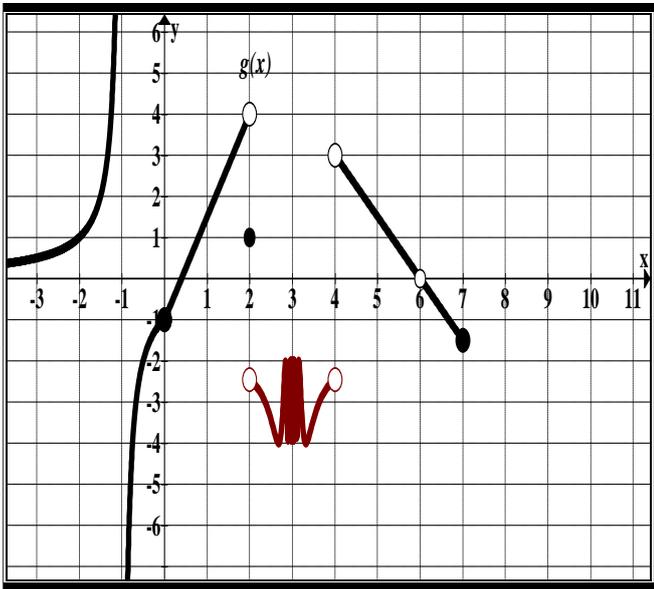
المراجعة النهائية لدخول الإمتحان

أعداد: أ. هلال حسين... خليفة بن زايد

الإجابة النموذجية

السؤال الأول :-

(1) إعتاد على الرسوم البيانية التي تمثل الدوال الآتية: $f(x), g(x)$:-



$g(x)$	$f(x)$	الدالة
$\{2, 4\}$	$\{2, 3\}$	م. نقاط انفصال بسبب وجود قفزة
$\{-1\}$	$\{0\}$	م. نقاط انفصال لانتهائي
$\{6\}$	لا يوجد	م. نقاط انفصال يمكن التخلص منها
$\{3\}$	$\{2.5\}$	م. نقاط انفصال تذبذبي
1.25	1	نهاية الدالة عند $x = 1$
لا يوجد	-3	ميل المماس عند $x = 4$
$\{-1, 0, 2, 4, 6, 3\}$	$\{0, 2, 3, \frac{5}{2}\}$	قيم x التي تكون الدالة عندها غير قابلة للإشتقاق
لا يوجد	-3	معدل التغير عند $x = 4$
موجب	موجب	معدل الإشارة التغير عند $x = 1$

قفزة	قفزة	سبب إنفصال الدالة عند $x = 2$
7	5	قيم x التي تكون عندها فقط النهاية لجهة اليسار موجودة
$\{-1, 2, 4, 7\}$	$\{0, 2, 3, 5\}$	قيم x التي تكون النهاية عندها غير موجودة

(i) أكمل الجدول التالي :-

(ii) من الرسم السابق اوجد مايلي :-

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow a \in \{4\}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow C} g(x) = \text{موجودة} \Rightarrow C \in]-\infty, 7[/ \{-1, 2, 4\}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 4} (g(x) + f(x)) \text{ غير موجودة}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x)}) \dots \dots \text{غير موجودة} \dots \dots$$

$$(2) \text{أعد تعريف الدالة } f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$$

حتى تصبح متصلة عند $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 4)(x - 2)}{x - 2} = 6 \text{ موجودة}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} & : x \neq 2 \\ 6 & : x = 2 \end{cases}$$

السؤال الثاني :-

أوجد نهاية الدوال التالية :-

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x + \frac{|x|}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x + \frac{-x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - 1) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x + \frac{|x|}{x} \right) \text{ غير موجودة}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{4}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + x \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{x} + \frac{x \cos x}{x}}{\frac{2x}{x}} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{(x-2)^2} - 2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-2| - 2}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2-2}{x-4} = 1$$

...السؤال الثالث :-

(i) إذا كانت $f(x) = 2x + \sin(5x)$ استخدم تعريف المشتقة لبيان أن $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(0+h) + \sin 5(0+h) - 0}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(h) + \sin 5(h)}{h} = \frac{2}{1} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 5(h)}{h} = 7$$

(ii) لتكن $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos 2x & : x \geq \frac{\pi}{4} \\ a + bx & : x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{\pi}{4}$

احسب قيمة كل من الثابتين a, b

$$f' \left(\frac{\pi}{4}^+ \right) = f' \left(\frac{\pi}{4}^- \right)$$

$$-2 \sin 2x \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = b$$

$$b = -2$$

متصلة الدالة عند $x = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} (1 + \cos 2x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (a + bx)$$

$$a + \frac{-2\pi}{4} = 1$$

$$\therefore a = 1 + \frac{\pi}{2}$$

(iii) لتكن $S(t) = t^3 - 6t^2$ يتحرك كجسيم الموقع $S(t)$ هي

حيث t وبالثواني S بالامتار . أوجد السرعة اللحظية (V) والسرعة العددية ($|V|$) والعجلة (a) للجسيم في نهاية الثانية الأولى من حركة .

$$S'(t)|_{t=1} = V|_{t=1} = 3t^2 - 12t|_{t=1} = 3 - 12 = -9 \text{ m/sec}$$

$$|V| = |-9| = 9 \text{ m/sec}$$

$$a(t)|_{t=1} = 6t - 12|_{t=1} = -6$$

السؤال الرابع :-

(i) : لتكن $f(3x^3) = 6x^3 - 18x^2$ ، فأوجد $f'(-3)$

$$f'(3x^3) \cdot 9x^2 = 18x^2 - 36x$$

$$3x^3 = -3 \Rightarrow x = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow 9f'(-3) = 18 + 36 \Rightarrow f'(-3) = 6$$

(ii) أوجد معادلة كل من المماس والعمودي على المماس للمنحنى $y = \sqrt{2} \cos x$ عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, 1)$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2} \sin x|_{x=\frac{\pi}{4}} = -1 \text{ ميل المماس}$$

$$y - 1 = -1 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \text{ معادلة المماس}$$

$$y - 1 = 1 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \text{ معادلة العمودي}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3, & x \geq 2 \\ bx - 5, & x < 2 \end{cases} \quad \text{لتكن: (iii)}$$

حيث a و b ثابتان أوجد القيم لكل من a و b التي تجعل f متصلة وقابلة للاشتقاق.

$f'(2^+) = f'(2^-)$ $2ax _{x=2} = b$ $4a = b$	<p>الدالة متصلة عند $x = 2$</p> $\lim_{x \rightarrow 2^+} (ax^2 + 3) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (bx - 5)$ $4a + 3 = 2b - 5$ $b + 3 = 2b - 5 \Rightarrow b = 8$ $a = 2$
---	--

(iv) إذا كانت $f(x) = ax^3 - 7x^2 + 8$ وكانت

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = 12$$

أوجد قيمة الثابت a

$$f'(x) = 3ax^2 - 14x$$

$$f''(x) = 6ax - 14$$

$$f'''(x) = 6a = 12 \Rightarrow a = 2$$

السؤال الخامس :-

(i) إذا كانت: $f'(-2) = 10$ و $g'(-1) = 0$ و $g(-1) = 1$

وكان: $h(x) = f(2x^2 - 4g(x))$ فأوجد $h'(-1)$

$$h'(x) = f'(2x^2 - 4g(x)) \times (4x - 4g'(x))$$

$$h'(-1) = f'(2 - 4g(-1)) \times (-4 - 4g'(-1))$$

$$h'(-1) = f'(2 - 4) \times (-4) = f'(-2) \times (-4) = 10 \times (-4) \\ = -40$$

(ii) أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $t = 4$ للدالة المعرفة بارامترياً كالآتي :

$$x = \sqrt{t} \quad , \quad y = (t - 3)^2$$

ثم أوجد معادلة خط المماس المرسوم لمنحني هذه الدالة عند $t = 4$

$$\frac{dy}{dt}|_{t=4} = 2(t - 3)|_{t=4} = 2 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}|_{t=4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8 \quad \text{ميل المماس}$$

نقطة التماس $(2, 1) \Rightarrow \Rightarrow t = 4 \Rightarrow x = 2, y = 1$

$$\text{معادلة المماس} \quad y - 1 = 8(x - 2)$$

(iii) أوجد $\frac{dy}{dx}$:-

$$(1) \quad y = (x^2 + 3)^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 10x(x^2 + 3)^4$$

$$(2) y = (3 + \sec x)^6$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 \sec x \tan x (3 + \sec x)^5$$

$$(3) y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

$$(4) y = \cot(2x + 5)$$

$$\frac{dy}{dx} = -2(\csc(2x + 5))^2$$

(iv) لتكن

$$f(x) = u^5 + 1, u = g(x) = \sqrt{x}, x = 1$$

قيمة أو جد (fog) عند نفس النقطة

$$(fog)'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(1) \times \frac{1}{2\sqrt{1}} = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

السؤال السادس :-

(i) لتكن $2y^3 = 3x^2$ أناثبت :

$$\frac{1}{y} = 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} \quad 6y^2 y' = 6x \Rightarrow 2yy'y' + y^2 y'' = 1 \quad (\text{علب بالقسمة } y)$$

$$\frac{1}{y} = 2(y')^2 + yy''$$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	$\frac{1}{3}$
1	3	-4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$

أحسب قيم المشتقات بالنسبة إلى x عند قيم x المعطاة الدوال المركبة :

$$\frac{d}{dx}(5f(x) - g(x)), x = 1 \quad (1)$$

$$5f'(1) - g'(1) = \frac{5}{3} + \frac{8}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))), x = 0 \quad (2)$$

$$f'(g(0))g'(0) = f'(1) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x) + 1}\right), x = 1 \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(1)(g(1) + 1) - f(1) \times g'(1)}{(g(1) + 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{3}(-4 + 1) + 3 \times \frac{8}{3}}{(-4 + 1)^2} = \frac{-1 + 8}{9} = \frac{7}{9}$$

مع أطيب التمنيات لجميع الطلاب والطالبات بالنجاح والتوفيق